

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Sejam k e p dois números reais e sejam $z_1 = (4k - 1) + (2 + p)i$ e $z_2 = (p + 1) + (3 - 6k)i$ dois números complexos.

Quais são os valores de k e de p para os quais z_1 é igual ao conjugado de z_2 ?

(A) $k = -\frac{3}{2}$ e $p = -4$

(B) $k = -\frac{3}{2}$ e $p = 4$

(C) $k = \frac{3}{2}$ e $p = -4$

(D) $k = \frac{3}{2}$ e $p = 4$

2. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Determine, em $\mathbb{C}$, as soluções da equação seguinte.

$$(2z + 3i)^2 + 2(2z + 3i) = -5$$

Apresente as soluções na forma algébrica.

3. Seja k um número real e sejam $z_1 = 4 - 2i$ e $z_2 = 5 + ki$ dois números complexos.

Qual é o valor de k para o qual o número complexo $z_1 \times \bar{z}_2$ é um número imaginário puro?

(A) 20

(B) 10

(C) 5

(D) 1

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -1 + i$ e $z_3 = 1 - 2i$.

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, $|w|$.

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\frac{(2 - i)(4 + 3i) + i^{10} - i^7}{1 - i}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

6. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números $z = 1 - 3i$ e $w = ai^{2028} + 4i^5$, $a \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que o afixo de $z \times \bar{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Qual é o valor de a ?

(A) -4

(B) -2

(C) 2

(D) 4

7. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo seguinte.

$$z = \left(\frac{8e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{(1 - 2i)^2 + i^{10} + 4i} \right)^3$$

Determine, sem recorrer à calculadora, z na forma algébrica.

8. Considere os números complexos $z_1 = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = 1 + i$.

Qual é o menor número natural n tal que o número complexo $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ seja um imaginário puro?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 6

9. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} - 2\sqrt{3}}$$

Determine, sem recorrer à calculadora, z na forma trigonométrica.

10. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \frac{-\sqrt{3}-i}{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$.

O número complexo w é uma das raízes sextas de um certo número complexo z .

Determine z na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

11. Na figura está representado, no plano complexo, o quadrado $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A pertence ao primeiro quadrante;
- a reta OA tem declive $\sqrt{3}$;
- o quadrado $[OABC]$ tem área igual a 81.

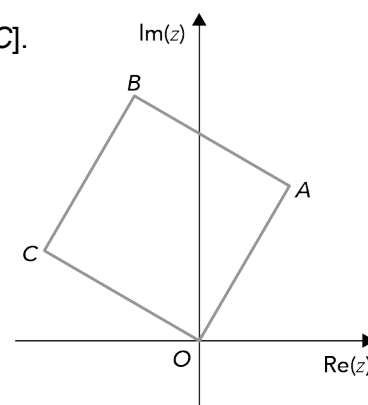
Em qual das seguintes opções se encontra o número complexo que tem por afixo o ponto B ?

(A) $9\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(B) $9\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

(C) $9e^{i\frac{7\pi}{12}}$

(D) $9e^{i\frac{5\pi}{6}}$



12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \frac{4\sqrt{3}+4i}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

Determine as soluções da equação $z^2 = w$.

Apresente as soluções na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

13. Considere os números complexos $z_1 = -3 + 4i$ e $z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

No plano de Argand-Gauss, sejam A e B as imagens geométricas dos números z_1 e z_2 , respetivamente.

Escreva uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a circunferência de centro no ponto A e que passa pelo ponto B .

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	Total
10	18	10	18	20	10	18	10	18	20	10	20	18	200

Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

z_1 é conjugado de z_2 se $4k - 1 = p + 1 \wedge 2 + p = -(3 - 6k)$.

Assim:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4k - 1 = p + 1 \\ 2 + p = -(3 - 6k) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4k - 2 = p \\ 2 + 4k - 2 = -3 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k - 2 = p \\ -2k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k - 2 = p \\ k = \frac{3}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \times \frac{3}{2} - 2 = p \\ k = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ k = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Seja $w = 2z + 3i$.

$$\begin{aligned} w^2 + 2w = -5 &\Leftrightarrow w^2 + 2w + 5 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow w = \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &\Leftrightarrow w_1 = -1 - 2i \vee w_2 = -1 + 2i \end{aligned}$$

$$w_1 = 2z + 3i \Leftrightarrow -1 - 2i = 2z + 3i \Leftrightarrow 2z = -1 - 5i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$w_2 = 2z + 3i \Leftrightarrow -1 + 2i = 2z + 3i \Leftrightarrow 2z = -1 - i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{C. S.} = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

3. Opção (B)

$$\begin{aligned} z_1 \times \bar{z}_2 &= (4 - 2i) \times (\overline{5 + ki}) = (4 - 2i) \times (5 - ki) = 20 - 4ki - 10i + 2ki^2 \\ &= 20 - 4ki - 10i - 2k = (20 - 2k) + (-4k - 10)i \end{aligned}$$

$z_1 \times \bar{z}_2$ é um número imaginário puro se:

$$20 - 2k = 0 \wedge -4k - 10 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2k = 20 \wedge 4k \neq -10$$

$$\Leftrightarrow k = 10 \wedge k \neq -\frac{5}{2}$$

$$4. w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{(-2+3i)(-1+i)}{1-2i} = \frac{2-2i-3i+3i^2}{1-2i} = \frac{-1-5i}{1-2i} = \frac{(-1-5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1-2i-5i-10i^2}{1^2+2^2} = \frac{9-7i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{7}{5}i$$

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{130}{25}} = \frac{\sqrt{130}}{5}$$

$$\begin{aligned} 5. \frac{(2-i)(4+3i)+i^{10}-i^7}{1-i} &= \frac{8+6i-4i-3i^2+i^{4 \times 2+2}-i^{4+3}}{1-i} = \frac{8+2i+3+i^2-i^3}{1-i} = \frac{8+2i+3-1-(-i)}{1-i} = \frac{10+3i}{1-i} \\ &= \frac{(10+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{10+10i+3i+3i^2}{1^2+1^2} = \frac{10+13i-3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{13}{2}i \end{aligned}$$

6. Opção (C)

$$i^{2028} = i^{4 \times 507} = i^0 = 1$$

$$i^5 = i^{4+1} = i$$

$$w = a + 4i$$

$$\bar{w} = \overline{a + 4i} = a - 4i$$

$$\begin{aligned} z \times \bar{w} &= (1 - 3i) \times (a - 4i) = a - 4i - 3i(a - 4i) = a - 4i - 3ai + 12i^2 = a - 4i - 3ai - 12 \\ &= (a - 12) + (-4 - 3a)i \end{aligned}$$

Uma vez que o afixo de $z \times \bar{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então:

$$a - 12 = -4 - 3a \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned} 7. \left(\frac{8e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{(1-2i)^2 + i^{10} + 4i} \right)^3 &= \left(\frac{8e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{1-4i+4i^2+i^{4 \times 2+2} + 4i} \right)^3 = \left(\frac{8e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{1-4i-4+i^2+4i} \right)^3 = \left(\frac{8e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{1-4i-4-1+4i} \right)^3 = \\ &= \left(\frac{8e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{-4} \right)^3 = \left(-2e^{i(-\frac{\pi}{6})} \right)^3 = (-2)^3 \left(e^{i(-\frac{3\pi}{6})} \right) = -8e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -8 \times (-i) = 8i \end{aligned}$$

8. Opção (D)

Seja α um argumento de $\sqrt{3} + i$:

$\text{Re}(z_1) > 0$ e $\text{Im}(z_1) > 0$, logo α é um ângulo pertencente ao 1.º quadrante.

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \text{ por exemplo.}$$

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{z}_2 = 1 - i$$

Seja β um argumento de $1 - i$:

$\text{Re}(\bar{z}_2) > 0$ e $\text{Im}(\bar{z}_2) < 0$, logo, β é um ângulo pertencente ao 4.º quadrante.

$$\text{tg } \beta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\beta = -\frac{\pi}{4}, \text{ por exemplo.}$$

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i(\frac{5\pi}{12})}$$

Assim:

$$z^n = \left(\sqrt{2} e^{i(\frac{5\pi}{12})} \right)^n = (\sqrt{2})^n \left(e^{i(\frac{5\pi}{12} \times n)} \right).$$

Para que $\left(\sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}\right)^n$ seja um imaginário puro é necessário que $\frac{5\pi}{12} \times n = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

De onde resulta que $n = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\frac{5\pi}{12}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6+12k}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Se $k = 0$: $n = \frac{6}{5} \notin \mathbb{N}$

Se $k = 1$: $n = \frac{18}{5} \notin \mathbb{N}$

Se $k = 2$: $n = \frac{30}{5} = 6 \in \mathbb{N}$

O menor número natural tal que o número complexo $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ seja um imaginário puro é 6.

9. Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i = \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + i = \\ &= 1 - i - 1 + \sqrt{3}i + i = \sqrt{3}i \\ 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} - 2\sqrt{3} &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) - 2\sqrt{3} = \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) - 2\sqrt{3} = \\ &= \sqrt{3} - i - 2\sqrt{3} = \\ &= -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Assim:

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}i(-\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}-i)(-\sqrt{3}+i)} = \frac{-\sqrt{3}-3i}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$\left|-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja θ um argumento do número complexo $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \\ \operatorname{Re}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right) &< 0 \wedge \operatorname{Im}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right) < 0 \end{aligned} \right\} \theta \text{ é um ângulo pertencente ao 3.º quadrante}$$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Desta forma, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$.

10. $|- \sqrt{3} - i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

Seja β um argumento do número complexo $-\sqrt{3} - i$:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{Re}(-\sqrt{3} - i) < 0 \wedge \operatorname{Im}(-\sqrt{3} - i) < 0 \end{array} \right\} \beta \text{ é um ângulo pertencente ao } 3.^\circ \text{ quadrante}$$

$$\beta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Assim, } -\sqrt{3} - i = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

$$w = \frac{-\sqrt{3} - i}{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$z = w^6 = \left(2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right)^6 = 2^6 e^{i\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right)} = 64e^{i(9\pi)} = -64$$

11. Opção (A)

O declive da reta OA é $\sqrt{3}$, pelo que a inclinação desta reta é $\frac{\pi}{3}$.

Como o quadrado $[OABC]$ tem área igual a 81, $\overline{OA} = \sqrt{81} = 9$.

$$\overline{OB}^2 = 9^2 + 9^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 162$$

$$\overline{OB} > 0, \text{ logo } \overline{OB} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

O número complexo $9\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ tem por afixo o ponto B .

12. $|4\sqrt{3} + 4i| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8$

Seja θ um argumento do número complexo $4\sqrt{3} + 4i$:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\theta) = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{Re}(4\sqrt{3} + 4i) > 0 \wedge \operatorname{Im}(4\sqrt{3} + 4i) > 0 \end{array} \right\} \theta \text{ é um ângulo pertencente ao } 1.^\circ \text{ quadrante}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Desta forma, } 4\sqrt{3} + 4i = 8e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$\text{Assim, } w = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = \frac{8e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)} = 4e^{i\left(\frac{2\pi}{6}\right)} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\text{Tem-se que } z^2 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

As soluções desta equação são da forma:

$$z_k = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1\}$$

Assim,

$$\text{para } k = 0: z_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \text{ e para } k = 1: z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

Desta forma, tem-se que:

$$z_0 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i$$

As soluções da equação pedida, apresentadas na forma algébrica, são $\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} - i$.

$$13. \quad z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -2 + 2i$$

$$|z_2 - z_1| = |(-2 + 2i) - (-3 + 4i)| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|z - z_1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - (-3 + 4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z + 3 - 4i| = \sqrt{5}$$

Uma condição em $\mathbb{C}$, para a circunferência de centro no ponto A e que passa pelo ponto B é:

$$|z + 3 - 4i| = \sqrt{5}$$