

Teste N.º 1

**Matemática A**

---

Duração do Teste: 90 minutos

---

**11.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

---

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

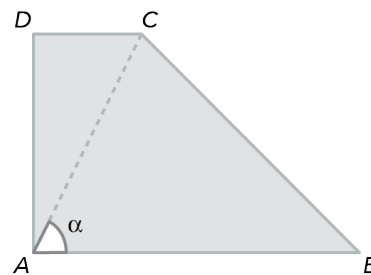
1. Na figura está representado o trapézio retângulo  $[ABCD]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 12$ ;
- $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$ ;
- $\alpha$  é a amplitude, em graus, do ângulo  $BAC$  ( $\alpha \in ]0^\circ, 90^\circ[$ ).

Qual é o valor exato da área do trapézio  $[ABCD]$ , para  $\alpha = 60^\circ$ ?

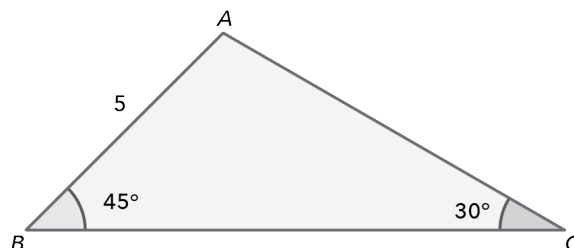
- (A)  $2\sqrt{5}(6\sqrt{3} + 3)$       (B)  $2\sqrt{3}(6\sqrt{5} + 5)$       (C)  $2\sqrt{5}(6 + \sqrt{3})$       (D)  $2\sqrt{3}(6 + \sqrt{5})$



2. Na figura está representado o triângulo  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- $\widehat{CBA} = 45^\circ$ ;
- $\widehat{BCA} = 30^\circ$ ;
- $\overline{AB} = 5$ .



A figura não está desenhada à escala.

Mostre, recorrendo a métodos analíticos, que  $\overline{BC} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$ .

3. Considere o ângulo de amplitude  $\alpha \in ]0^\circ, 90^\circ[$  e tal que  $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$ .

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor exato de:

$$3 \sin(180^\circ - \alpha) + \cos(-\alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)$$

4. Considere a condição  $2 - 5 \sin^2 \alpha = 3k \wedge \alpha \in ]180^\circ, 270^\circ] \wedge k \in \mathbb{R}$ .

Em qual dos seguintes intervalos se encontram todos os valores de  $k$  para os quais a condição é possível?

- (A)  $[-1, \frac{2}{3}[$       (B)  $] -1, \frac{2}{3}]$       (C)  $[-\frac{2}{3}, 1[$       (D)  $] -\frac{2}{3}, 1]$

5. Considere a representação geométrica de ângulos numa mesma circunferência trigonométrica.

Qual dos seguintes pares de medidas de amplitudes corresponde a ângulos com o mesmo lado extremidade?

- (A)  $-\frac{3\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$       (B)  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{25\pi}{2}$       (C)  $-\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{22\pi}{3}$       (D)  $-\frac{5\pi}{6}$  e  $\frac{17\pi}{6}$

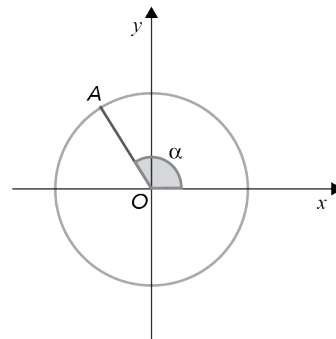
6. Qual das seguintes expressões representa um número negativo, para qualquer  $x$  pertencente ao intervalo  $]\frac{3\pi}{4}, \pi[$ ?

- (A)  $-\sin x \cos x$       (B)  $\sin(2x) \cos x$       (C)  $\sin x \cos(2x)$       (D)  $\sin(2x) \cos(2x)$

7. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n.  $Oxy$ , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto  $A$ , situado no segundo quadrante, pertence à circunferência e tem abcissa  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;
- o ângulo de amplitude  $\alpha$  tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e, por lado extremidade, a semirreta  $\hat{OA}$  ( $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ).

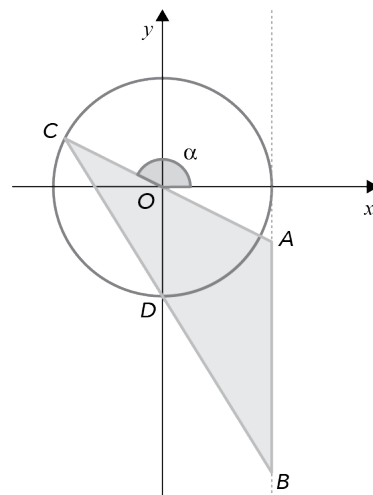


Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato de  $\sin(\pi - \alpha) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}^2(-\alpha)$ .

8. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n.  $Oxy$ , a circunferência trigonométrica, o triângulo  $[ABC]$  e o ponto  $D$ .

Sabe-se que:

- $A$  é um ponto pertencente à reta de equação  $x = 1$ , de ordenada negativa;
- $C$  é o ponto de interseção da reta  $OA$  com a circunferência, situado no segundo quadrante;
- $\alpha$  é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta  $\hat{OC}$  ( $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ );
- $D$  é o ponto de coordenadas  $(0, -1)$ ;
- $B$  é o ponto de interseção da reta de equação  $x = 1$  com a reta  $CD$ .



Seja  $f$  a função, de domínio  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , definida por  $f(\alpha) = \frac{-(\cos \alpha - 1)^2}{2 \cos \alpha}$ .

8.1 Mostre que a área do triângulo  $[ABC]$ , em função de  $\alpha$ , é dada por  $f(\alpha)$ .

8.2 Para um certo valor de  $\beta$  pertencente ao intervalo  $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , sabe-se que:

$$\sin(\pi + \beta) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sqrt{5}$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor exato de  $f(\beta)$ .

9. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(-2x - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos^2(\pi - x)$$

9.1 Mostre que  $f(x) = 1 + 2 \cos(2x)$ .

9.2 Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:  $g(x) = 4 - f\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$ .

Considere as seguintes afirmações:

(I) o contradomínio da função  $g$  é o intervalo  $[-2, 4]$ .

(II)  $\frac{2\pi}{3}$  é período da função  $g$ .

Pode afirmar-se que:

(A) ambas as afirmações são falsas.

(B) ambas as afirmações são verdadeiras.

(C) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

(D) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

10. Considere a função  $g$  definida por:

$$g(x) = \frac{6 \cos x}{1 - \sin x}$$

Determine, analiticamente, o domínio da função  $g$ .

11. Considere, num referencial o.n.  $Oxy$ , os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , ambas de domínio  $[0, \pi[$ , definidas por  $f(x) = -5 \cos(2x) + 1$  e  $g(x) = 3 - 4 \sin^2\left(x - \frac{11\pi}{3}\right)$ .

Considere que:

- $A$  é o ponto de maior ordenada do gráfico da função  $f$ ;
- $B$  é o ponto de interseção dos gráficos das funções  $f$  e  $g$  com maior abcissa;
- $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem a mesma ordenada que o ponto  $B$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor da área do triângulo  $[ABC]$ , arredondado às décimas.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora;
- representar, no mesmo referencial, o triângulo  $[ABC]$ ;
- indicar as coordenadas dos vértices do triângulo  $[ABC]$  e, caso seja necessário fazer arredondamentos, utilizar duas casas decimais;
- apresentar o valor da área do triângulo  $[ABC]$  com o arredondamento pedido.

**FIM**

## COTAÇÕES

| Item                |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |       |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| Cotação (em pontos) |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |       |
| 1.                  | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8.1 | 8.2 | 9.1 | 9.2 | 10. | 11. | Total |
| 10                  | 18 | 18 | 10 | 10 | 10 | 18 | 20  | 20  | 18  | 10  | 18  | 20  | 200   |

## Teste N.º 1 – Proposta de resolução

### 1. Opção (B)

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{AD}$$

Em função de  $\alpha$ , a área do trapézio  $[ABCD]$  é dada por:

$$A(\alpha) = \frac{12 + 4\sqrt{5} \cos \alpha}{2} \times 4\sqrt{5} \sin \alpha$$

Para  $\alpha = 60^\circ$  tem-se que:

$$A(60^\circ) = \frac{12 + 4\sqrt{5} \cos(60^\circ)}{2} \times 4\sqrt{5} \sin(60^\circ)$$

$$= \left(6 + 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2}\right) \times 4\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 12\sqrt{5} \times \sqrt{3} + \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

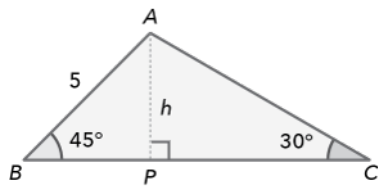
$$= 2\sqrt{3}(6\sqrt{5} + 5)$$

**Cálculos auxiliares:**

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DC}}{4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \overline{DC} = 4\sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AD}}{4\sqrt{5}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4\sqrt{5} \sin \alpha$$

2. Sejam  $h$  a medida da altura do triângulo  $[ABC]$  e  $P$  a projeção do ponto  $A$  no segmento de reta  $[BC]$ .



$$\overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PC}$$

Tem-se que:

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{5} \Leftrightarrow h = 5 \sin 45^\circ \Leftrightarrow h = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{BP} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\overline{PC}} \Leftrightarrow \overline{PC} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{PC} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Desta forma, } \overline{BC} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{5(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}.$$

3.  $3 \sin(180^\circ - \alpha) + \cos(-\alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)$

$$= 3 \sin \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha$$

$$= 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$$

$$= 3 \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{6}{5}$$

$$= \frac{18}{5}$$

**Cálculos auxiliares:**

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

Como  $\alpha \in ]0^\circ, 90^\circ[$ , tem-se que  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ .

#### 4. Opção (A)

$\alpha \in ]180^\circ, 270^\circ]$ , pelo que, para todo o  $\alpha$  pertencente a este intervalo,  $-1 \leq \sin \alpha < 0$ .

$$-1 \leq \sin \alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < \sin^2 \alpha \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -5\sin^2 \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2 - 5\sin^2 \alpha < 2$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 3k < 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq k < \frac{2}{3}$$

$$k \in \left[-1, \frac{2}{3}\right[$$

#### 5. Opção (C)

Sabemos que dois ângulos têm o mesmo lado extremidade quando a diferença das suas amplitudes é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .

$\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$ , logo  $-\frac{3\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{4}$  não correspondem a medidas de ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{25\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 13\pi$ , logo  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{25\pi}{2}$  não correspondem a medidas de ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{22\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 8\pi = 4 \times 2\pi$ , logo  $-\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{22\pi}{3}$  correspondem a medidas de ângulos com o mesmo lado extremidade.

$\frac{17\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{11\pi}{3}$ , logo  $-\frac{5\pi}{6}$  e  $\frac{17\pi}{6}$  não correspondem a medidas de ângulos com o mesmo lado extremidade.

#### 6. Opção (D)

$x$  pertence ao intervalo  $\left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$ , logo  $2x$  pertence ao intervalo  $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ .

Assim, podemos garantir que:  $\sin x > 0$  e  $\cos x < 0$ , bem como:

$$\sin(2x) < 0 \text{ e } \cos(2x) > 0$$

Desta forma:

$$-\sin x \cos x > 0$$

$$\sin(2x) \cos x > 0$$

$$\sin x \cos(2x) > 0$$

$$\sin(2x) \cos(2x) < 0$$

7. Sabe-se que o ponto  $A$ , situado no segundo quadrante, pertence à circunferência e tem

abscissa  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , pelo que  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}^2(-\alpha) \\ = \sin \alpha - \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

**Cálculos auxiliares:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{6}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ logo } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{6} \times 3}{-3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 3}{-3\sqrt{3}} = -\sqrt{2}$$

$$\text{Assim, } \sin \alpha - \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{6} + 4}{3}.$$

8.1 O triângulo  $[ABC]$  é semelhante ao triângulo  $[ODC]$ .

$\overline{OC} = \overline{OD}$ , pelo que  $\overline{CA} = \overline{AB}$ .

$$\overline{CA} = \overline{CO} + \overline{OA} = 1 + \overline{OA}$$

Seja  $A'$  a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre o eixo  $Ox$

Consideremos o triângulo  $[OA'A]$ :

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow -\cos \alpha = \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{-1}{\cos \alpha}$$

$$\text{Tem-se, assim, que: } \overline{CA} = 1 - \frac{1}{\cos \alpha}.$$

A medida da altura do triângulo  $[ABC]$  corresponde à distância do ponto  $C$  à reta de equação  $x = 1$ .

Tem-se que as coordenadas do ponto  $C$ , em função de  $\alpha$ , são  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  e que  $C$  é um ponto do segundo quadrante, logo  $\cos \alpha < 0$ .

$$\text{Assim, altura} = 1 + (-\cos \alpha) = 1 - \cos \alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{1 - \frac{1}{\cos \alpha}}{2} \times (1 - \cos \alpha) = \frac{(\cos \alpha - 1)(1 - \cos \alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{-(\cos \alpha - 1)^2}{2 \cos \alpha} = f(\alpha)$$

$$8.2 \quad \sin(\pi + \beta) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sqrt{5} \Leftrightarrow -\sin \beta - 2\sin \beta = -\sqrt{5} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \beta = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos \beta = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow \cos \beta = \pm \frac{2}{3}$$

$$\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \text{ pelo que: } \cos \beta = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Assim, } f(\beta) = \frac{-\left(-\frac{2}{3}-1\right)^2}{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\left(-\frac{5}{3}\right)^2}{-\frac{4}{3}} = \frac{\frac{25}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{75}{36} = \frac{25}{12}$$

O valor exato de  $f(\beta)$  é  $\frac{25}{12}$ .

$$\begin{aligned}
9.1 \quad f(x) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(-2x - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos^2(\pi - x) = \\
&= (-\sin x)^2 - \cos(2x + \pi) + \cos(2x) + (-\cos x)^2 = \\
&= \sin^2 x + \cos(2x) + \cos(2x) + \cos^2 x = \\
&= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2\cos(2x) = \\
&= 1 + 2\cos(2x)
\end{aligned}$$

## 9.2 Opção (D)

$$\begin{aligned}
g(x) &= 4 - f\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = 4 - \left(1 + 2\cos\left(2\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right)\right) = 4 - 1 - 2\cos\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right) = \\
&= 3 - 2\cos\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

O argumento,  $x$ , da função cosseno, toma valores de um intervalo com amplitude superior a  $2\pi$ .

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \cos\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow -2 \leq -2\cos\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right) \leq 2 \\
&\Leftrightarrow 3 - 2 \leq 3 - 2\cos\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right) \leq 3 + 2 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq g(x) \leq 5
\end{aligned}$$

O contradomínio da função  $g$  é  $[1, 5]$ .

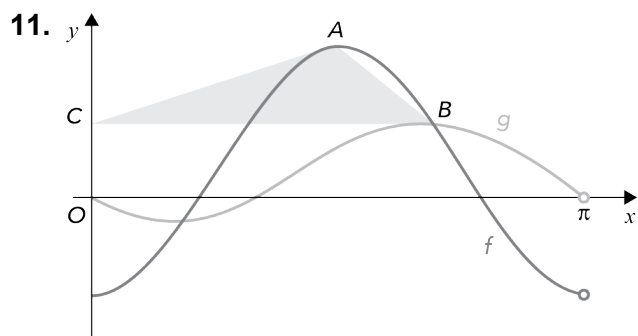
$\frac{2\pi}{3}$  é período da função  $g$  se se verificar  $g(x + \frac{2\pi}{3}) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= 3 - 2\cos\left(6\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{5}\right) \\
&= 3 - 2\cos\left(6x + \frac{12\pi}{3} + \frac{2\pi}{5}\right) \\
&= 3 - 2\cos\left(6x + \frac{2\pi}{5} + 4\pi\right) \\
&= 3 - 2\cos\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que  $\frac{2\pi}{3}$  é período de  $g$ .

Desta forma, podemos garantir que apenas a afirmação (II) é verdadeira.

$$\begin{aligned}
10. \quad D_g &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \\
1 - \sin x &= 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$



$$A(1,57; 6) \quad B(2,15; 2,99) \quad C(0; 2,99)$$

$$A_{[ABC]} = \frac{2,15 \times (6 - 2,99)}{2} \approx 3,2$$