

## Prova-modelo de Exame Final Nacional

### Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

---

Nome:

| N.º:

| Turma:

---

Duração da prova: 150 minutos | Tolerância: 30 minutos

| Ano Letivo: 2025/26

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

## Formulário

### Geometria

#### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

#### Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

### Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

### Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

\* 1. Considere a sucessão  $(u_n)$  definida por:  $u_n = \left(\frac{3n+2}{1+3n}\right)^n$

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ \ln(ex) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de  $\lim g(u_n)$ ?

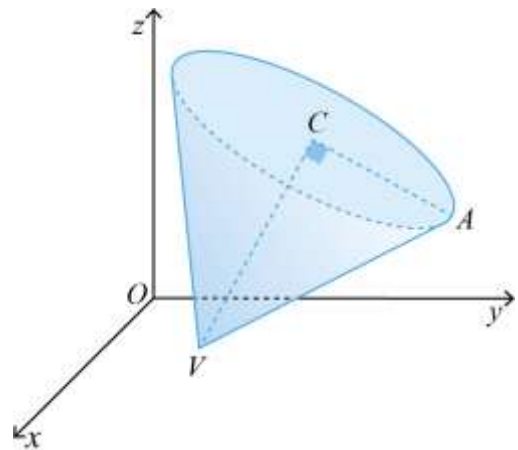
- (A)  $e^{\frac{1}{3}}$       (B)  $-e^{\frac{1}{3}}$       (C)  $e^{\frac{4}{3}}$       (D)  $\frac{4}{3}$

2. Na figura, está representado, em referencial o. n.  $Oxyz$ , um cone de revolução.

Sabe-se que:

- o vértice  $V$  tem coordenadas  $(4, 2, 1)$ ;
- $C$  é o centro da base do cone;
- $[CV]$  é a altura do cone;
- $[AV]$  é uma geratriz do cone;
- o vetor  $\overrightarrow{AV}$  tem coordenadas  $\left(\frac{7}{2}, -2, 0\right)$ ;
- a reta  $CV$  é definida por:

$$(x, y, z) = (8, 0, -3) + k(-4, 2, 4), k \in \mathbb{R}$$



\* 2.1. Mostre que  $A\left(\frac{1}{2}, 4, 1\right)$  e que o plano que contém a base do cone pode ser definido por:

$$2x - y - 2z + 5 = 0$$

2.2. Determine o volume do cone.

2.3. Admita que se pretende inscrever no cone um cilindro de revolução, com eixo coincidente com a altura do cone e uma das bases contida no plano da base do cone.

Se  $x$ , com  $0 < x < 3$ , designar a altura do cilindro, mostre que o seu volume é dado por  $V(x) = \frac{29\pi}{4} x \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2$  e determine o valor de  $x$  para o qual o volume do cilindro é máximo.

\* 3. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 37 675.

Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?

- (A) 38 227      (B) 38 226      (C) 37 951      (D) 37 950

4. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e todos diferentes.

\* 4.1. Quantos dos números referidos são inferiores a 500 e têm exatamente um algarismo par?

(A) 72                      (B) 104                      (C) 120                      (D) 168

\* 4.2. Dos números referidos, considere apenas os que são múltiplos de 5 e a soma dos três algarismos é par.

Determine a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente um dos números nas condições enunciadas, os seus algarismos estarem por ordem crescente.

\* 5. A Sofia decidiu preparar-se para uma prova de orientação em bicicleta, seguindo um plano de treinos. Em cada treino, utiliza uma aplicação que regista a distância percorrida e a energia gasta. Na tabela seguinte, apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo  $x$  a distância percorrida, em quilómetros, e  $y$  a correspondente energia gasta, em quilocalorias.

$x$	4,8	6,2	6,9	7,5	8,1	8,8	9,6
$y$	330	425	470	505	545	595	645

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Nos treinos cujos registos se apresentam, a Sofia percorreu, em média, cerca de   **I**   quilómetros por treino e a mediana das quilocalorias gastas foi   **II**  .

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de  $y$  em função de  $x$ , obtido a partir dos dados apresentados na tabela, verifica-se uma correlação   **III**   entre a distância percorrida e as quilocalorias gastas por treino.

Com base nesse modelo e utilizando as estimativas dos parâmetros arredondadas às milésimas, estima-se que a Sofia, num treino em que percorra 6 quilómetros, gaste, aproximadamente,   **IV**   quilocalorias.

I	II	III	IV
a) 7,2	a) 470	a) negativa forte	a) 401
b) 7,4	b) 505	b) positiva fraca	b) 410
c) 7,6	c) 545	c) positiva forte	c) 421

\* 6. Numa certa sociedade de advogados, sabe-se que:

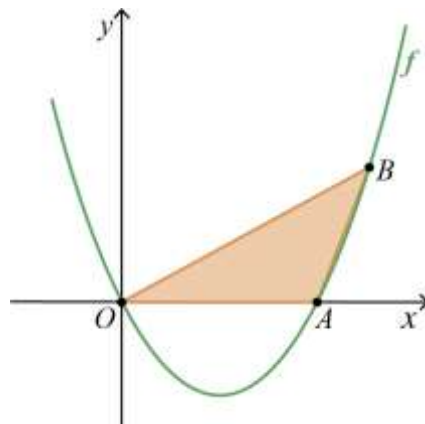
- 65% dos colaboradores são do sexo feminino;
- duas em cada cinco colaboradoras são advogadas na área do Direito Fiscal;
- um quinto dos colaboradores que são advogados na área do Direito Fiscal são do sexo masculino.

Escolhe-se, ao acaso, um colaborador da sociedade de advogados.

Determine a probabilidade de o colaborador escolhido ser do sexo masculino, sabendo que não é advogado na área do Direito Fiscal.

7. Na figura seguinte, estão representados, em referencial o. n.  $Oxy$ :

- parte do gráfico de uma função  $f$ , definida em  $\mathbb{R}$ , por  $f(x) = e^x + 3e^{-x} - 4$ ;
- o triângulo  $[OAB]$ , em que:
  - $A$  é o ponto do gráfico de  $f$  de abcissa positiva que pertence ao eixo  $Ox$ ;
  - $B$  é o ponto do gráfico de  $f$  de abcissa  $\ln 6$ .



Determine a área do triângulo  $[OAB]$ .

Apresente o resultado na forma  $a \ln b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

8. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x - \pi)}{4x - 2x^2} & \text{se } x < 0 \\ 2 \cos^2 x - \frac{9}{4} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Averigue se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

\* 9. Em 1957, na cidade de Zunyi, na província de Guizhou, surgiu uma epidemia de gripe A. Admita que, nesse ano, a cidade tinha cerca de 100 000 habitantes.

A evolução da doença foi bem modelada por:

$$N(t) = 1000e^{0,38t - 0,009t^2},$$

em que  $N(t)$  representa o número de pessoas doentes e  $t$  o tempo, em dias, contado desde o início da epidemia.

Nos primeiros cinco dias houve um instante,  $t_0$ , em que o número de pessoas doentes, dois dias depois desse instante, aumentou 3000 pessoas relativamente ao número de pessoas doentes registado no instante  $t_0$ .

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, em que instante isso aconteceu.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permita(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do ponto relevante, arredondadas às décimas;
- apresente o valor pedido, em dias e horas, arredondado às unidades.

\* 10. Considere, no plano complexo, um ponto  $A$ , afixo de um certo número complexo  $z$ . Sabe-se que  $A$  pertence ao primeiro quadrante e que  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$ .

A que quadrante do plano complexo pertence o afixo de  $\frac{z}{i} - \bar{z}$ ?

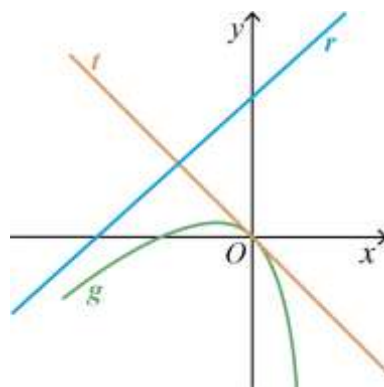
(A) Primeiro      (B) Segundo      (C) Terceiro      (D) Quarto

11. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

Considere  $z_1 = \sqrt{3} + i$  e  $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

Determine o menor valor de  $n$  natural para o qual  $(z_1 \times 2i \overline{z_2})^n$  é um número real positivo.

- \* 12. No referencial o. n.  $Oxy$  da figura, estão representadas parte do gráfico de uma função  $g$ , duas vezes diferenciável, a reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $g$  na origem do referencial, e a reta  $r$ , assíntota ao gráfico de  $g$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ . Sabe-se que:



- o gráfico da função  $g$  tem concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio;

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -\frac{9}{10}$

Considere as proposições seguintes:

- $g'(0) \times g''(0) < 0$
- As retas  $r$  e  $t$  são perpendiculares.

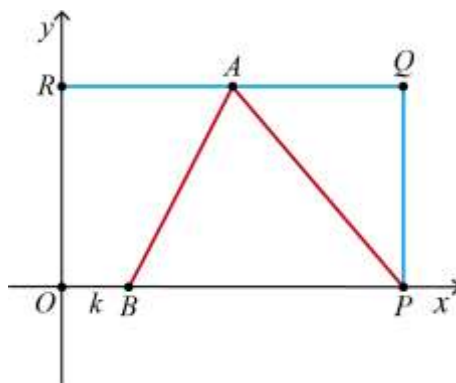
Justifique que as proposições I. e II. são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

13. Na figura, está representado, em referencial o. n.  $Oxy$ , o retângulo  $[OPQR]$ .

Sabe-se que:

- os pontos  $P$  e  $R$  pertencem aos semieixos positivos  $Ox$  e  $Oy$ , respetivamente;
- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem aos segmentos de reta  $[RQ]$  e  $[OP]$ , respetivamente;
- $\overline{OP} = 2\overline{OR}$
- $\overline{OR} = 2\overline{OB}$
- $4\overline{AQ} = 3\overline{OR}$
- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AP} = -7$



Considere  $\overline{OB} = k$ .

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine o valor exato da área do retângulo  $[OPQR]$ .

\* 14. Seja  $(u_n)$  uma progressão aritmética e  $(v_n)$  uma progressão geométrica, tais que:

- $u_6 - u_2 = 20$
- $u_{12} = 2u_5 + 8$
- $v_1 = u_2$
- $v_2 = u_7 - 1$

Qual é a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica  $(v_n)$ ?

\* 15. Considere a família de funções  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definidas por:

$$f(x) = [\ln(ax)]^2 - 4 \ln(bx), \text{ com } a, b > 0.$$

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
- $f(e) = -8$

Determine os valores de  $a$  e de  $b$ .

**FIM**

### COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.	9.	10.	12.	14.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	12	14	14	12	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.2.		2.3.		7.		8.		11.		13.		Subtotal
Cotação (em pontos)	3 x 14 pontos												42
<b>TOTAL</b>													<b>200</b>

## SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

$$1. \frac{3n+2}{1+3n} = 1 + \frac{1}{3n+1}$$

$$\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^n$$

$$= \lim \left( \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1} \right)^{\frac{n}{3n+1}}$$

$$= (e^1)^{\lim \frac{n}{3n+1}} = (e^1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

$$\lim g(u_n) = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{e}} g(x) = g(\sqrt[3]{e}) = \ln(e \times e^{\frac{1}{3}}) = \ln(e^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 3n+2 & 3n+1 \\ \hline -3n-1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

### Opção (D)

2.

$$2.1. \overrightarrow{VA} = -\overrightarrow{AV} = -\left(\frac{7}{2}, -2, 0\right) = \left(-\frac{7}{2}, 2, 0\right)$$

$$A = V + \overrightarrow{VA} = (4, 2, 1) + \left(-\frac{7}{2}, 2, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 4, 1\right)$$

O vetor de coordenadas  $(-4, 2, 4)$  é um vetor diretor da reta  $CV$  e, como a reta  $CV$  é perpendicular ao plano que contém a base do cone, então o vetor é também um vetor normal ao plano.

Conclui-se assim que o plano pode ser escrito na forma  $-4x + 2y + 4z + d = 0$ .

Substituindo por  $A\left(\frac{1}{2}, 4, 1\right)$ , vem que  $-4 \times \frac{1}{2} + 2 \times 4 + 4 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$

Assim, o plano que contém a base do cone pode ser definido por:

$$-4x + 2y + 4z - 10 = 0, \text{ simplificando, vem } 2x - y - 2z + 5 = 0$$

2.2. Quer-se determinar as coordenadas do ponto  $C$  que é a interseção da reta  $CV$  com o plano que contém a base do cone.

Ponto genérico da reta  $CV$ :  $(x, y, z) = (8 - 4k, 2k, -3 + 4k), k \in \mathbb{R}$

Substituindo este ponto genérico na equação do plano que contém a base do cone, vem:

$$2(8 - 4k) - 2k - 2(-3 + 4k) + 5 = 0 \Leftrightarrow 16 - 8k - 2k + 6 - 8k + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27 - 18k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

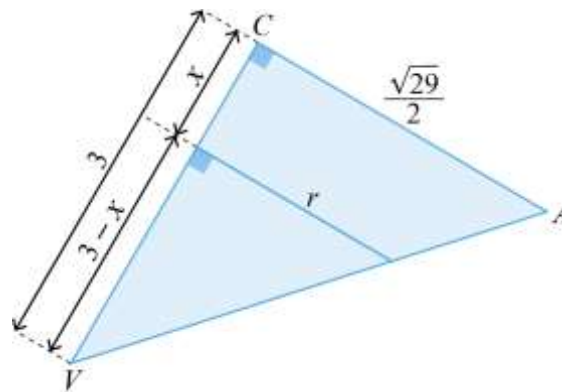
$$\text{Ponto } C: \left(8 - 4 \times \frac{3}{2}, 2 \times \frac{3}{2}, -3 + 4 \times \frac{3}{2}\right) = (2, 3, 3)$$

$$r_{\text{base}} = \overline{AC} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (3 - 4)^2 + (3 - 1)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\text{Altura}_{\text{cone}} = \overline{CV} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 3)^2 + (1 - 3)^2} = 3$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{Altura}_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{29\pi}{4} \text{ u. v.}$$

2.3. Seja  $x$  a altura do cilindro, com  $0 < x < 3$ .



Como a altura do cone é 3, por semelhança de triângulos, o raio do cilindro,  $r$ , é dado por:

$$\frac{r}{3-x} = \frac{\frac{\sqrt{29}}{2}}{3}, \text{ ou seja,}$$

$$r = \frac{\sqrt{29}}{2} \times \frac{3-x}{3} = \frac{\sqrt{29}}{2} \left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

Logo, o volume do cilindro é dado por:

$$V(x) = \pi r^2 x$$

$$V(x) = \pi \left[ \frac{\sqrt{29}}{2} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \right]^2 x$$

$$V(x) = \frac{29\pi}{4} x \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2.$$

Derivando:

$$V'(x) = \frac{29\pi}{4} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 - \frac{29\pi}{4} x \times \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{29\pi}{4} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \left[1 - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3}\right]$$

$$V'(x) = \frac{29\pi}{4} \left(1 - \frac{x}{3}\right) (1-x)$$

Assim,  $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , com  $0 < x < 3$ .

Como:

$x$	0		1		3
$V'$	N.D.	+	0	-	N.D.
$V$	N.D.	↗	Máximo	↘	N.D.

o volume é máximo para  $x = 1$ .

3. Seja  $n$  o número da linha do triângulo de Pascal em que o terceiro elemento é 37 675.

$$\begin{aligned} {}^nC_2 = 37\,675 &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 37\,675 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} = 37\,675 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 37\,675 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 75\,350 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-75\,350)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = 275 \vee n = -274 \Leftrightarrow n = 275 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Três últimos elementos da linha seguinte:

$${}^{276}C_{274} = 37\,950; \quad {}^{276}C_{275} = 276 \quad \text{e} \quad {}^{276}C_{276} = 1$$

A soma dos três últimos elementos da linha seguinte é:  $37\,950 + 276 + 1 = 38\,227$

### Opção (A)

4.

4.1. O algarismo das centenas ou é par ou é ímpar.

Se o algarismo das centenas é par, só pode ser 2 ou 4. Os outros dois têm de ser ímpares.

$$2 \times {}^5A_2 = 40$$

Se o algarismo das centenas é ímpar, há duas escolhas, 1 ou 3. Nas restantes posições, fica um algarismo par, de entre o 2, 4, 6 ou 8, e um ímpar de entre o 5, 7, 9 e 1 ou 3.

$$2 \times 2 \times 4 \times 4 = 64$$

No total há  $40 + 64 = 104$  números nessas condições.

### Opção (B)

4.2. Para a soma de três algarismos ser par, o número terá de ser constituído por 3 algarismos pares ou por 2 algarismos ímpares e 1 algarismo par.

Para o número ser múltiplo de 5 terá de terminar em 5.

Assim, temos as seguintes situações:

Ou Par Ímpar  $\boxed{5}$  ou Ímpar Par  $\boxed{5}$

Par Ímpar  $\boxed{5} \rightarrow 4^2$

Para o número ter o algarismo das centenas par, o algarismo das dezenas ímpar e terminar em 5, temos  $4 \times 4 = 4^2$  números diferentes, uma vez que temos 4 algarismos pares disponíveis para as centenas (2, 4, 6 e 8) e 4 algarismos ímpares disponíveis para as dezenas (1, 3, 7 e 9), em que a ordem interessa.

Ímpar Par  $\boxed{5} \rightarrow 4 \times 4$

Para o número ter o algarismo das centenas ímpar, o algarismo das dezenas par e terminar em 5, temos  $4 \times 4 = 16$  números diferentes, uma vez que temos 4 algarismos ímpares disponíveis para as centenas (1, 3, 7 e 9) e 4 algarismos pares disponíveis para as dezenas (2, 4, 6 e 8), em que a ordem interessa.

Assim, existem  $4^2 + 4 \times 4 = 32$  números nas condições enunciadas.

Para os algarismos estarem por ordem crescente, os dois primeiros algarismos têm de ser escolhidos de entre 1, 2, 3, 4, por ordem crescente.

Como a soma dos três algarismos tem de ser par e o último algarismo é 5, a soma dos dois primeiros tem de ser ímpar.

Os casos favoráveis são: 125, 145, 235, 345

Logo, há 4 casos favoráveis.

Como existem 32 números nas condições enunciadas, a probabilidade pedida é

$$P = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$5. \bar{x} = \frac{4,8 + 6,2 + 6,9 + 7,5 + 8,1 + 8,8 + 9,6}{7} = \frac{519}{70} \approx 7,4$$

A Sofia percorreu, em média, cerca de 7,4 km por treino.

São dados 7 valores ordenados por ordem crescente, logo a mediana será o valor central, isto é, 505.

330 | 425 | 470 | 505 | 545 | 595 | 645

Recorrendo à calculadora gráfica, inserem-se os dados em duas listas e calcula-se a reta de regressão do tipo  $y = ax + b$ , obtendo-se:

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	4.8	330		
2	6.2	425		
3	6.9	470		
4	7.5	505		

6.

Sejam:

- $A$ : «o colaborador é advogado na área do Direito Fiscal».
- $B$ : «o colaborador é do sexo feminino»;

Pretende-se determinar a probabilidade de o colaborador escolhido ser do sexo masculino, sabendo que não é advogado na área do Direito Fiscal, ou seja:  $P(\bar{B} | \bar{A})$

Sabe-se que:

$$P(B) = 0,65$$

$$P(A | B) = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{B} | A) = \frac{1}{5}$$

De  $P(A | B) = \frac{2}{5}$ , vem que:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A | B) = 0,65 \times \frac{2}{5} = 0,26$$

Seja  $P(A) = k$ , então,

$$P(\bar{B} | A) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{k} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{k}{5}$$

$$\text{Logo, } 0,26 + \frac{k}{5} = k \Leftrightarrow 1,3 + k = 5k \Leftrightarrow 4k = 1,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0,325$$

$$\frac{k}{5} = \frac{0,325}{5} = 0,065$$

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0,285}{0,675} = \frac{19}{45}$$

	$A$	$\bar{A}$	
$B$	0,26	0,39	0,65
$\bar{B}$	$\frac{k}{5}$		0,35
	$k$		1

	$A$	$\bar{A}$	
$B$	0,26	0,39	0,65
$\bar{B}$	0,065	0,285	0,35
	0,325	0,675	1

Alternativa:

$$P(B) = 0,65$$

$$P(A | B) = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{B} | A) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Logo, } P(B | A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Comece-se por determinar  $P(A \cap B)$ :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A | B) = 0,65 \times \frac{2}{5} = 0,26$$

Como:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ vem que } \frac{4}{5} = \frac{0,26}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{0,26}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow P(A) = 0,325$$

Assim:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,325 = 0,675$$

Agora, determine-se  $P(\bar{B} \cap \bar{A})$ .

Sabemos que:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,65 = 0,35$$

E também:

$$P(\bar{B} \cap A) = P(A) \times P(\bar{B} | A) = 0,325 \times \frac{1}{5} = 0,065$$

Logo:

$$P(\bar{B} \cap \bar{A}) = P(\bar{B}) - P(\bar{B} \cap A) = 0,35 - 0,065 = 0,285$$

Portanto:

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,285}{0,675} = \frac{285}{675} = \frac{19}{45}$$

Assim, a probabilidade de o colaborador escolhido ser do sexo masculino, sabendo que não é advogado na área do Direito Fiscal é  $\frac{19}{45}$ .

## 7.

Ponto A:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 3e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{3}{e^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 3 - 4e^x = 0$$

Seja  $y = e^x$

De  $e^{2x} + 3 - 4e^x = 0$ , vem que:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 3$$

Assim,  $e^x = 1 \vee e^x = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 3$

Conclui-se assim que  $A(\ln 3, 0)$ .

Ponto B:

$$y_B = f(\ln 6) = e^{\ln 6} + 3e^{-\ln 6} - 4 = 6 + 3e^{\ln \frac{1}{6}} - 4 = 6 + \frac{1}{2} - 4 = \frac{5}{2}$$

Conclui-se, assim, que  $B\left(\ln 6, \frac{5}{2}\right)$ .

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times y_B}{2} = \frac{\ln 3 \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4} \ln 3$$

8. Para a função  $f$  ser contínua em  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x-\pi)}{4x-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{4-2x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{4-0} = -1 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 \cos^2 x - \frac{9}{4} \right) = 2 \cos^2 0 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

Conclui-se, assim, que a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

9. Número de pessoas doentes no instante  $t_0$ :  $N(t_0)$

$N(t_0 + 2)$  número de pessoas doentes 2 dias após o instante  $t_0$ .

$N(t_0 + 2) = N(t_0) + 3000$ : número de pessoas doentes, 2 dias após o instante  $t_0$  aumentou 3000 em relação ao número de pessoas doentes registado no instante  $t_0$ .

Quer-se determinar a solução da equação:

$$N(x + 2) = N(x) + 3000$$

Sejam:

$$y_1 = N(x + 2) = 1000e^{0,38(x+2)-0,009(x+2)^2}$$

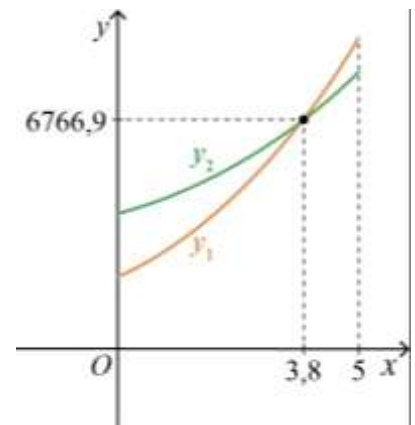
$$y_2 = N(x) + 3000 = 1000e^{0,38x-0,009x^2} + 3000$$

A abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos é:

$$x \approx 3,8$$

$$3 + 0,8 \text{ dias}$$

$$0,8 \times 24 \approx 19,2 \approx 19 \text{ horas}$$



Conclui-se assim que o descrito no enunciado ocorreu 3 dias e 19 horas após o início da epidemia.

10. Seja  $z = a + bi$  um número complexo, tal que  $\text{Re}(z) > \text{Im}(z)$ , logo, tem-se  $a > b$ .

$$\frac{z}{i} - \bar{z} = \frac{a+bi}{i} - \overline{a+bi} = \frac{(a+bi) \times (-i)}{i \times (-i)} - (a - bi) = -ai + b - a + bi = (b - a) + (b - a)i$$

Sabe-se que  $a > b$ , logo:

$$a > b \Leftrightarrow b - a < 0$$

Assim,

$$\text{Re} \left( \frac{z}{i} - \bar{z} \right) < 0 \text{ e } \text{Im} \left( \frac{z}{i} - \bar{z} \right) < 0,$$

concluindo-se assim que o afixo de  $\frac{z}{i} - \bar{z}$  pertence ao 3.º quadrante.

**Opção (C)**

11. Seja  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ .

$$\rho = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{ Q.} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 1.^\circ \text{ Q.} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Portanto,  $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) = e^{-i\frac{\pi}{9}}$$

Assim,

$$(z_1 \times 2i \times \overline{z_2})^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{9}}\right)^n = \left(4e^{i\frac{7\pi}{9}}\right)^n = 4^n e^{i\frac{7\pi n}{9}}$$

Para  $(z_1 \times 2i \times \overline{z_2})^n$  ser um número real positivo,  $\frac{7\pi n}{9} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{7\pi n}{9} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{18k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

O menor valor natural de  $n$  obtém-se para  $k = 7$ , para o qual  $n = 18$ .

12. Relativamente à proposição I., como a reta  $t$  é tangente ao gráfico da função  $g$  em  $x = 0$  e é decrescente, então o seu declive é negativo pelo que  $g'(0) < 0$ . Sabe-se ainda que o gráfico da função  $g$  tem concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio, logo a segunda derivada da função  $g$  é negativa em todo o seu domínio, em particular, em  $x = 0$ . Temos, assim, que  $g''(0) < 0$ .

Como  $g'(0) < 0$  e  $g''(0) < 0$ , conclui-se que  $g'(0) \times g''(0) > 0$ .

Desta forma, a proposição I. é falsa.

No que respeita à proposição II., para as retas  $r$  e  $t$  serem perpendiculares,  $m_r \times m_t = -1$ , sendo  $m_r$  e  $m_t$  os declives das retas  $r$  e  $t$ , respetivamente.

Pela definição de derivada num ponto,  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ .

Como  $g(0) = 0$ , então  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ .

Sabe-se ainda que a reta  $r$  é assíntota ao gráfico de  $g$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ .

Sabe-se que o declive da assíntota não vertical é igual ao  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$  corresponde ao declive da reta tangente em  $x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$  corresponde ao declive da assíntota não vertical quando  $x \rightarrow -\infty$ , então, para as retas  $r$  e  $t$  serem perpendiculares,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$  deveria ser  $-1$  e não  $-\frac{9}{10}$  como é referido.

Desta forma, a proposição II. também é falsa.

13.

$$\overline{BO} = k$$

$$\overline{OR} = 2\overline{BO} \Leftrightarrow \overline{OR} = 2k$$

$$\overline{OP} = 2\overline{OR} \Leftrightarrow \overline{OP} = 4k$$

$$4\overline{AQ} = 3\overline{OR} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{3}{4}\overline{OR} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{3}{4} \times 2k \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{3k}{2}$$

$$\overline{RA} = \overline{RQ} - \overline{AQ} = 4k - \frac{3k}{2} = \frac{5k}{2}$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{AP} = -7 \Leftrightarrow (\overline{BO} + \overline{OR} + \overline{RA}) \cdot (\overline{AQ} + \overline{QP}) = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BO} \cdot \overline{AQ} + \overline{BO} \cdot \overline{QP} + \overline{OR} \cdot \overline{AQ} + \overline{OR} \cdot \overline{QP} + \overline{RA} \cdot \overline{AQ} + \overline{RA} \cdot \overline{QP} = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overline{BO}\| \times \|\overline{AQ}\| \times (-1) + 0 + 0 + \|\overline{OR}\| \times \|\overline{QP}\| \times (-1) + \|\overline{RA}\| \cdot \|\overline{AQ}\| \times 1 + 0 = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \times \frac{3k}{2} \times (-1) + 2k \times 2k \times (-1) + \frac{5k}{2} \times \frac{3k}{2} \times 1 = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3k^2}{2} - 4k^2 + \frac{15k^2}{4} = -7 \Leftrightarrow -\frac{7k^2}{4} = -7 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2 \Leftrightarrow k = 2 \quad (k > 0)$$

Assim:

$$\overline{OR} = 2k = 2 \times 2 = 4 \quad \text{e} \quad \overline{OP} = 4k = 4 \times 2 = 8, \text{ pelo que } A_{[OPQR]} = 4 \times 8 = 32 \text{ u. a.}$$

14.

Seja  $r$  a razão da progressão aritmética  $(u_n)$ .

Como  $(u_n)$  é uma progressão aritmética, tem-se  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Pela primeira condição:

$$u_6 - u_2 = 20 \Leftrightarrow (u_1 + 5r) - (u_1 + r) = 20 \Leftrightarrow 4r = 20 \Leftrightarrow r = 5$$

Usando agora a segunda condição:

$$u_{12} = 2u_5 + 8 \Leftrightarrow u_1 + 11r = 2(u_1 + 4r) + 8$$

Como  $r = 5$ , vem:

$$u_1 + 11 \times 5 = 2(u_1 + 4 \times 5) + 8 \Leftrightarrow u_1 + 55 = 2(u_1 + 20) + 8$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 55 = 2u_1 + 40 + 8 \Leftrightarrow u_1 + 55 = 2u_1 + 48 \Leftrightarrow 7 = u_1$$

Assim,  $u_2 = u_1 + r = 7 + 5 = 12$  e  $u_7 = u_1 + 6r = 7 + 6 \times 5 = 37$

Na progressão geométrica  $(v_n)$ :

$$v_1 = u_2 = 12$$

$$v_2 = u_7 - 1 = 37 - 1 = 36$$

Seja  $q$  a razão da progressão geométrica.

$$q = \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow q = \frac{36}{12} \Leftrightarrow q = 3$$

$$S_{10} = v_1 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 12 \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = 354\,288$$

15.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$$

$$f'(x) = ([\ln(ax)]^2 - 4 \ln(bx))' = 2 \ln(ax) \times \frac{a}{ax} - 4 \times \frac{b}{bx} = \frac{2 \ln(ax)}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2 \ln(ax) - 4}{x}$$

Como  $f'(a) = 0$ , vem:

$$\frac{2 \ln(a \times a) - 4}{a} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(a^2) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln(a^2) = 4 \Leftrightarrow \ln(a^2) = 2 \Leftrightarrow a^2 = e^2$$

Como  $a > 0$ , conclui-se que  $a = e$ .

Usando agora a condição  $f(e) = -8$  e, sabendo que  $a = e$ , obtém-se:

$$f(e) = -8 \Leftrightarrow [\ln(e \times e)]^2 - 4 \ln(be) = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\ln(e^2)]^2 - 4 \ln(be) = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4 \ln(be) = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(be) = 3$$

$$\Leftrightarrow be = e^3$$

$$\Leftrightarrow b = e^2$$

Portanto,  $a = e$  e  $b = e^2$ .