

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2026

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

10 páginas

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \ln(ex)$.

O valor de $f(e^{2026})$ é:

- (A) $\ln(2026)$ (B) $\ln(2027)$ (C) 2026 (D) 2027

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a reta r e plano β , definidos por:

$$r: (x, y, z) = (7, 1, -3) + \lambda(-1, 4, -2), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta: x + y - z - 1 = 0$$

2.1. Em qual das seguintes opções está uma equação de uma reta contida no plano β ?

- (A) $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(2, 1, 3), \quad k \in \mathbb{R}$
(B) $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(2, 2, -2), \quad k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(2, -2, 0), \quad k \in \mathbb{R}$
(D) $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(-3, -3, 3), \quad k \in \mathbb{R}$

2.2. Seja I o ponto de interseção da reta r com o plano β .

Mostre que I pertence à superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 131$, e **sem efetuar cálculos**, indique a distância de I à origem do referencial.

3. Considere a função g definida em \mathbb{R} por:

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{com } b, c \text{ e } d \in \mathbb{R}$$

3.1. Sabe-se que a função g admite um extremo relativo no ponto de abscissa 2 e o seu gráfico admite um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 2)$.

Determine os valores dos coeficientes b, c e d .

3.2. Considere agora $b = c = d = 1$.

Seja f a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = e^{1-2x} + 8x$.

Mostre que existe, pelo menos, um ponto de abscissa no intervalo $]1, 2[$, onde as retas tangentes aos gráficos de f e de g são paralelas.

4. Considere a função f definida por:

$$f(x) = \frac{3}{4 - x^2} + \log_2(x^3 - x)$$

Determine o domínio da função f .

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

5. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \ln(e^2 + 3e^x)$$

O gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$, de equação $y = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

O valor de b é igual a:

(A) $\ln 3$

(B) $\ln 2$

(C) e^2

(D) e^3

6. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = 3a + 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ onde } a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

Considere que u_2 e u_3 são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabendo que a razão da progressão geométrica é $a + 1$, determine o valor de a .

7. Considere, num referencial ortonormado xOy , a representação gráfica de parte da função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \ln x + x$$

Considere um ponto B do gráfico de f , de abcissa a , com $a \in]1, e[$, e seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto B .

Sejam:

- A o ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas;
- C o ponto da reta de equação $x = a$ com a mesma ordenada de A .

Sabe-se que o quadrilátero $[OBCA]$ é um trapézio cuja medida da área é 4, em unidades quadradas.

Determine, **recorrendo à calculadora gráfica**, o valor de a , sabendo que esse valor existe e é único.

Não é necessário justificar a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta, deve:

- mostrar, analiticamente, que a reta t pode ser definida pela equação

$$y = \left(1 + \frac{1}{a}\right)x + \ln a - 1$$

- indicar as coordenadas dos pontos A e C ;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) das funções visualizadas na calculadora que lhe permitam resolver a equação;
- indicar o valor de a , arredondado às décimas.

8. Em março de 2025, decorreu o Campeonato do Mundo de Atletismo – Indoor, em Nanjing, na China.

No dia 23 desse mês, realizou-se a final do *salto em comprimento masculino*.

A **Tabela 1** contém as idades e as marcas alcançadas, em metros, pelos atletas presentes na final do *salto em comprimento masculino*.

Posição	Atleta	País	Marca	Idade (ano 2025)
1.º	Mattia Furlani	Itália	8,30 m	20 anos
2.º	Wayne Pinnock	Jamaica	8,29 m	24 anos
3.º	Liam Adcock	Austrália	8,28 m	29 anos
4.º	Shunsuke Izumiya	Japão	8,21 m	25 anos
5.º	Miltiadis Tentoglou	Grécia	8,14 m	27 anos
6.º	Shu Heng	China	8,14 m	21 anos
7.º	Cameron Crump	EUA	8,13 m	25 anos
8.º	Gerson Baldé	Portugal	8,03 m	25 anos
9.º	Simon Ehammer	Suíça	7,99 m	25 anos
10.º	Tajay Gayle	Jamaica	7,83 m	29 anos

Tabela 1

Relativamente aos dados apresentados na **Tabela 1**, considere as seguintes proposições:

I – *A média e a mediana das idades dos 10 finalistas têm o mesmo valor;*

II – *A amplitude das idades dos 10 finalistas é o triplo da amplitude interquartil dos mesmos dados;*

III – *Seis dos dez finalistas têm uma marca inferior à marca média obtida pelos 10 finalistas.*

Acerca das proposições anteriores, pode afirmar-se que:

- (A) As proposições são todas verdadeiras
- (B) A proposição I é falsa e a proposição III é verdadeira
- (C) A proposição II é verdadeira e a proposição III é falsa
- (D) As proposições são todas falsas

9. Considere a função h , de domínio $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, definida por:

$$h(x) = \frac{x}{1 - \tan x}$$

Estude a função h quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

Indique a(s) equação(ões) da(s) assíntota(s), caso existam.

10. Seja g a função definida em $[0, \pi]$ por $g(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 1$.

Considere, em referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g e o triângulo $[SPM]$, tais que:

- os pontos S e P são os pontos de interseção do gráfico da função g com o eixo Ox ;
- o ponto M é o ponto do gráfico de g com menor ordenada.

Sem recorrer à calculadora, determine a área, em unidades quadradas, do triângulo $[SPM]$.

11. Considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 + 3x = 0$ e a reta r definida por $y = mx + 1$.

Sabe-se que a reta r intersecta a circunferência em dois pontos P e Q .

Sabendo que $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência, mostre que $3m - 2 = 0$.

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

12. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que $P(A) = \frac{2}{5}$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$.

Qual o valor de $P(A | \bar{A} \cup \bar{B})$?

(A) $\frac{11}{20}$

(B) $\frac{5}{17}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{8}{17}$

13. Uma fábrica de parafusos possui apenas duas máquinas, A e B , para a produção de um tipo especial de parafuso.

Relativamente à produção destes parafusos no mês de março, sabe-se que:

- 52% foram produzidos pela máquina A ;
- 2,5% dos parafusos produzidos na máquina A , eram defeituosos;
- 96,2% dos parafusos produzidos na máquina B , não eram defeituosos.



O desempenho conjunto das máquinas A e B é classificado conforme a **Tabela 2**, em que p indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0,08 \leq p \leq 1 \Rightarrow$	Péssimo
$0,06 \leq p < 0,08 \Rightarrow$	Mau
$0,04 \leq p < 0,06 \Rightarrow$	Razoável
$0,02 \leq p < 0,04 \Rightarrow$	Bom
$0 \leq p < 0,02 \Rightarrow$	Excelente

Tabela 2

Como pode classificar o desempenho conjunto das máquinas A e B , durante o mês de março?

Apresente todos os cálculos que efetuar.

14. A Maria tem dezasseis livros de *Eça de Queirós*: nove romances, cinco crónicas, um conto adaptado ao teatro e um livro com o relato de uma viagem.

Para uma exposição, vai seleccionar dez livros:

- três romances adaptados ao cinema: *O Crime do Padre Amaro*, *O Primo Basílio* e *A Relíquia*;
- o romance *Os Maias*;
- dois outros romances, duas crónicas, o conto e o livro com o relato de uma viagem.



Os dez livros são colocados, ao acaso, lado a lado.

Qual é a probabilidade de as crónicas ficarem nas extremidades e os romances adaptados ao cinema ficarem todos juntos?

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação à centésima de milésima.

Grupo B

12. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere, em \mathbb{C} , os números z e w , tal que $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ e $\arg(zw) = \pi$.

Qual dos seguintes valores pode ser o $\arg z$?

(A) $\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$

(D) $\frac{5\pi}{4}$

13. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere, em \mathbb{C} , os números $w_1 = 2 + i$ e $w_2 = 5e^{i(\frac{5\pi}{6})}$.

Seja $z = \frac{w_1 \times (1-3i)}{(w_2)^n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Determine o menor número natural n , tal que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

14. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere os números z_1, z_2 e w , tais que $|z_1| = \rho$, $|z_2| = \lambda$ e $w = \rho - \lambda i$.

Sabendo que o afixo de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\sqrt{5}$, mostre que:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 10$$

FIM

Item											
Cotação (em pontos)											
1	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4	5	6	7	TOTAL	200 pontos	
10	10	14	14	14	14	10	14	14			
8	9	10	11	GRUPO A			GRUPO B				
				12	13	14	12	13			14
10	14	14	12	10	14	12	10	14	12		

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2026

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos

10 páginas

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.



Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Complexos

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

As raízes índice n de $z = r e^{i\theta}$ são dadas por:

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \ln(ex)$.

O valor de $f(e^{2026})$ é:

- (A) $\ln(2027)$ (B) $\ln(2026)$ (C) 2027 (D) 2026

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a reta r e plano β , definidos por:

$$r: (x, y, z) = (7, 1, -3) + \lambda(-1, 4, -2), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \beta: x + y - z - 1 = 0$$

2.1. Em qual das seguintes opções está uma equação de uma reta contida no plano β ?

(A) $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(-3, -3, 3), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(2, 1, 3), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(2, 2, -2), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(2, -2, 0), k \in \mathbb{R}$

2.2. Seja I o ponto de interseção da reta r com o plano β .

Mostre que I pertence à superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 131$, e **sem efetuar cálculos**, indique a distância de I à origem do referencial.

3. Considere a função g definida em \mathbb{R} por:

$$g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d, \text{ com } b, c \text{ e } d \in \mathbb{R}$$

3.1. Sabe-se que a função g admite um extremo relativo no ponto de abscissa 2 e o seu gráfico admite um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 2)$.

Determine os valores dos coeficientes b, c e d .

3.2. Considere agora $b = c = d = 1$.

Seja f a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = e^{1-2x} + 8x$.

Mostre que existe, pelo menos, um ponto de abscissa no intervalo $]1, 2[$, onde as retas tangentes aos gráficos de f e de g são paralelas.

4. Considere a função f definida por:

$$f(x) = \frac{3}{4 - x^2} + \log_2(x^3 - x)$$

Determine o domínio da função f .

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

5. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \ln(e^2 + 3e^x)$$

O gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$, de equação $y = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

O valor de b é igual a:

(A) $\ln 2$

(B) $\ln 3$

(C) e^3

(D) e^2

6. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = 3a + 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}, \text{ onde } a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

Considere que u_2 e u_3 são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabendo que a razão da progressão geométrica é $a + 1$, determine o valor de a .

7. Considere, num referencial ortonormado xOy , a representação gráfica de parte da função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \ln x + x$$

Considere um ponto B do gráfico de f , de abscissa a , com $a \in]1, e[$, e seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto B .

Sejam:

- A o ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas;
- C o ponto da reta de equação $x = a$ com a mesma ordenada de A .

Sabe-se que o quadrilátero $[OBCA]$ é um trapézio cuja medida da área é 4, em unidades quadradas.

Determine, **recorrendo à calculadora gráfica**, o valor de a , sabendo que esse valor existe e é único.

Não é necessário justificar a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta, deve:

- mostrar, analiticamente, que a reta t pode ser definida pela equação

$$y = \left(1 + \frac{1}{a}\right)x + \ln a - 1$$

- indicar as coordenadas dos pontos A e C ;
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) das funções visualizadas na calculadora que lhe permitam resolver a equação;
- indicar o valor de a , arredondado às décimas.

8. Em março de 2025, decorreu o Campeonato do Mundo de Atletismo – Indoor, em Nanjing, na China.

No dia 23 desse mês, realizou-se a final do *salto em comprimento masculino*.

A **Tabela 1** contém as idades e as marcas alcançadas, em metros, pelos atletas presentes na final do *salto em comprimento masculino*.

Posição	Atleta	País	Marca	Idade (ano 2025)
1.º	Mattia Furlani	Itália	8,30 m	20 anos
2.º	Wayne Pinnock	Jamaica	8,29 m	24 anos
3.º	Liam Adcock	Austrália	8,28 m	29 anos
4.º	Shunsuke Izumiya	Japão	8,21 m	25 anos
5.º	Miltiadis Tentoglou	Grécia	8,14 m	27 anos
6.º	Shu Heng	China	8,14 m	21 anos
7.º	Cameron Crump	EUA	8,13 m	25 anos
8.º	Gerson Baldé	Portugal	8,03 m	25 anos
9.º	Simon Ehammer	Suíça	7,99 m	25 anos
10.º	Tajay Gayle	Jamaica	7,83 m	29 anos

Tabela 1

Relativamente aos dados apresentados na **Tabela 1**, considere as seguintes proposições:

- I** – *A média e a mediana das idades dos 10 finalistas têm o mesmo valor;*
- II** – *A amplitude das idades dos 10 finalistas é o triplo da amplitude interquartil dos mesmos dados;*
- III** – *Seis dos dez finalistas têm uma marca inferior à marca média obtida pelos 10 finalistas.*

Acerca das proposições anteriores, pode afirmar-se que:

- (A) As proposições são todas falsas
- (B) A proposição II é verdadeira e a proposição III é falsa
- (C) As proposições são todas verdadeiras
- (D) A proposição I é falsa e a proposição III é verdadeira

9. Considere a função h , de domínio $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, definida por:

$$h(x) = \frac{x}{1 - \tan x}$$

Estude a função h quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

Indique a(s) equação(ões) da(s) assíntota(s), caso existam.

10. Seja g a função definida em $[0, \pi]$ por $g(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 1$

Considere, em referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g e o triângulo $[SPM]$, tais que:

- os pontos S e P são os pontos de interseção do gráfico da função g com o eixo Ox ;
- o ponto M é o ponto do gráfico de g com menor ordenada;

Sem recorrer à calculadora, determine a área, em unidades quadradas, do triângulo $[SPM]$.

11. Considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 + 3x = 0$ e a reta r definida por $y = mx + 1$.

Sabe-se que a reta r intersecta a circunferência em dois pontos P e Q .

Sabendo que $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência, mostre que $3m - 2 = 0$.

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

12. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que $P(A) = \frac{2}{5}$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$.

Qual o valor de $P(A | \bar{A} \cup \bar{B})$?

(A) $\frac{8}{17}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{11}{20}$

(D) $\frac{5}{17}$

13. Uma fábrica de parafusos possui apenas duas máquinas, A e B , para a produção de um tipo especial de parafuso.

Relativamente à produção destes parafusos no mês de março, sabe-se que:

- 52% foram produzidos pela máquina A ;
- 2,5% dos parafusos produzidos na máquina A , eram defeituosos;
- 96,2% dos parafusos produzidos na máquina B , não eram defeituosos.



O desempenho conjunto das máquinas A e B é classificado conforme a **Tabela 2**, em que p indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0,08 \leq p \leq 1 \Rightarrow$ Péssimo
$0,06 \leq p < 0,08 \Rightarrow$ Mau
$0,04 \leq p < 0,06 \Rightarrow$ Razoável
$0,02 \leq p < 0,04 \Rightarrow$ Bom
$0 \leq p < 0,02 \Rightarrow$ Excelente

Tabela 2

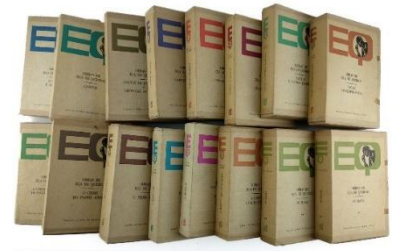
Como pode classificar o desempenho conjunto das máquinas A e B , durante o mês de março?

Apresente todos os cálculos que efetuar.

14. A Maria tem **dezasseis** livros de *Eça de Queirós*: nove romances, cinco crónicas, um conto adaptado ao teatro e um livro com o relato de uma viagem.

Para uma exposição, vai seleccionar dez livros:

- três romances adaptados ao cinema: *O Crime do Padre Amaro*, *O Primo Basílio* e *A Relíquia*;
- o romance *Os Maias*;
- dois outros romances, duas crónicas, o conto e o livro com o relato de uma viagem.



Os dez livros são colocados, ao acaso, lado a lado.

Qual é a probabilidade de as crónicas ficarem nas extremidades e os romances adaptados ao cinema ficarem todos juntos?

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação à centésima de milésima.

Grupo B

12. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere, em \mathbb{C} , os números z e w , tal que $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ e $\arg(zw) = \pi$.

Qual dos seguintes valores pode ser o $\arg z$?

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{5\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

13. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere, em \mathbb{C} , os números $w_1 = 2 + i$ e $w_2 = 5e^{i(\frac{5\pi}{6})}$.

Seja $z = \frac{w_1 \times (1-3i)}{(w_2)^n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Determine o menor número natural n , tal que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

14. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere os números z_1, z_2 e w , tais que $|z_1| = \rho$, $|z_2| = \lambda$ e $w = \rho - \lambda i$.

Sabendo que o afixo de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\sqrt{5}$, mostre que:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 10$$

FIM

Item										
Cotação (em pontos)										
1	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4	5	6	7	TOTAL	200 pontos
10	10	14	14	14	14	10	14	14		
8	9	10	11	GRUPO A			GRUPO B			
				12	13	14	12	13	14	
10	14	14	12	10	14	12	10	14	12	