SPM TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2026

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (quatro páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Qualquer que seja a progressão geométrica (u_n) de termos positivos, tal que:

$$u_{n+2} - u_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

a soma dos primeiros 1012 termos é igual a:

(A) 1012 **(B)** $2024\,u_1$ **(C)** 1 **(D)** $1012\,u_1$

2. No dia 1 de janeiro de 2020, foi iniciado um investimento com a duração de 5 anos.

- Em 1 de janeiro de 2020, foram depositados $1\,000$€.
- Em 1 de janeiro de cada um dos 4 anos seguintes $(2021, 2022, 2023\ e\ 2024)$, foram efetuados novos depósitos, de modo que os valores em euros do depósito inicial e dos novos depósitos efetuados nos anos seguintes constituem uma progressão aritmética de razão 100.
- O capital depositado em cada data é remunerado a uma taxa anual fixa de juro simples de 2%.

No final do investimento (em 1 de janeiro de 2025), o montante total acumulado, o que inclui os juros recebidos, é:

(A) $6\,340$€ **(B)** $6\,312$€ **(C)** $6\,300$€ **(D)** $6\,000$€

3. Na Figura 1 está representada a tracejado, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.

O ângulo de amplitude α radianos, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência trigonométrica;
- o ponto D tem coordenadas $(-1,0)$;
- o ponto B pertence ao segundo quadrante e tem a mesma ordenada do ponto A;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa do ponto B;
- $\overline{AB} = 2$.

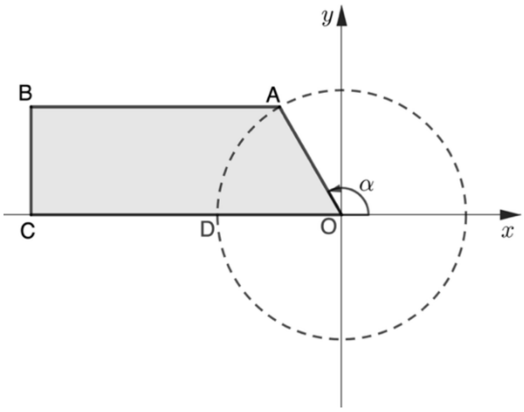

Figura 1

3.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCO]$, representada a sombreado, é dada em função de α por:

$$f(\alpha) = \frac{4\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

3.2. Seja $g(\alpha)$ a área do triângulo $[ABD]$.

Para um certo valor de α sabe-se que $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{9}{4}$

Determine, para esse valor de α, o valor exato das coordenadas do ponto A.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

4.1. Mostre que $f(x) = \sin x - \cos x$

4.2. Sabendo que $\tan\beta = \frac{3}{4}$ e $\beta \in \left]-\pi, 0\right[$, calcule o valor de $f(\beta)$.

5. Considere as seguintes proposições:

I. Se α radianos for a amplitude de um ângulo orientado tal que $\sin\alpha > 0$ e $\tan\alpha < 0$ então $\cos(2026\pi - \alpha) < 0$

II. Se g for uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$g(x) = \sin(ax)$

em que a é um número real não nulo, tal que os únicos pontos onde g muda de sinal são os de abcissa $x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

então o período positivo mínimo de g é igual a π

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) As proposições **I** e **II** são verdadeiras.

(B) A proposição **I** é verdadeira e a **II** é falsa.

(C) A proposição **I** é falsa e a **II** é verdadeira.

(D) As proposições **I** e **II** são falsas.

6. Considere, num referencial o.n. xOy, as retas r e s e o ponto P.

Sabe-se que:

- $r: (x, y) = (1,1) + k(-1,3),\ k \in \mathbb{R}$
- $s: x + 2y - 13 = 0$
- o ponto P pertence à reta r e ao eixo Oy

Determine a distância de P a s.

7. Na Figura 2 está representada uma circunferência, uma reta r que não a interseta e um ponto X exterior a ambas.

Sabe-se que:

- Na circunferência estão assinalados seis pontos distintos A, B, C, D, E e F;
- Na reta r estão assinalados cinco pontos distintos P, Q, R, S e T;
- Os pontos P, A, D e X são colineares;
- Os pontos Q, B, C e X são colineares;
- Além das situações referidas, nenhuma reta do plano contém três ou mais dos doze pontos representados.

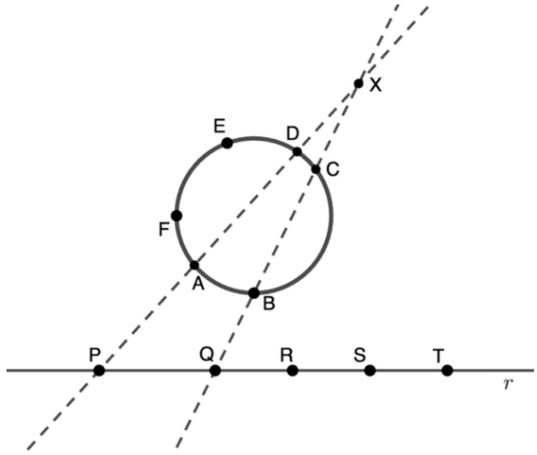

Figura 2

Considere apenas as posições relativas indicadas na figura.

O número de triângulos que se podem formar, tendo por vértices três dos doze pontos representados e exatamente um vértice na reta r, é:

(A) $5 \times {}^7C_2$

(B) $5 \times {}^7C_2 - 2 \times {}^3C_2$

(C) $5 \times {}^7C_2 - 2 \times {}^3C_2 - 2 \times {}^4C_2$

(D) $5 \times {}^7C_2 - 2 \times {}^3C_2 - {}^4C_2$

8. Na Figura 3, está representada num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida no plano xOy.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy;
- o quadrilátero $[AOBP]$ é um losango de lado ℓ.

Mostre que $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AD} = \ell^2$

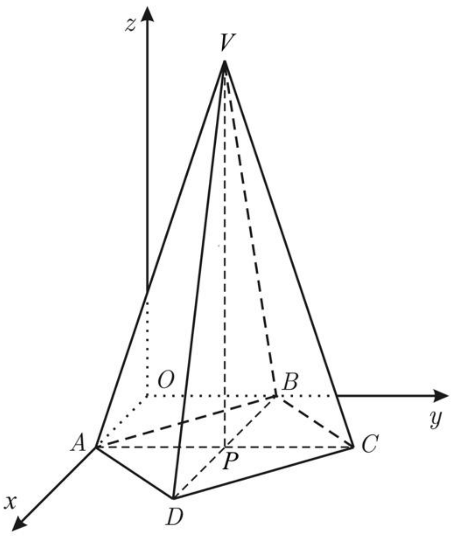

Figura 3

9. Considere a reta r e os planos α_t e β, definidos num referencial o.n. $Oxyz$, por:

- $r: (x, y, z) = (4, 0, 2) + k(2, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$
- $\alpha_t: x + y + tz - 2 = 0,\ t \in \mathbb{R}$
- $\beta: 2x - y + z - 3 = 0$

Considere agora as frases seguintes que se encontram incompletas relativamente às posições relativas consideradas em cada uma delas:

Para qualquer número real t diferente de -1, a reta r intersecta o plano α_t num único ponto. Quando $t = -1$, a reta r _______ α_t .

Não existe número real t tal que os planos α_t e β sejam _______ .

As expressões que completam, respetivamente, os espaços do texto, de modo a que se obtenham afirmações verdadeiras são:

(A) "*é estritamente paralela a*" e "*coincidentes*".
(B) "*está contida em*" e "*perpendiculares*".
(C) "*é estritamente paralela a*" e "*perpendiculares*".
(D) "*está contida em*" e "*coincidentes*".

10. O volume de um prisma quadrangular regular é dado, para cada valor real positivo de x, por $V(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$ e a altura do mesmo prisma é dada por $A(x) = x + 3$. Determine a expressão, na forma de um polinómio em x, da medida da aresta da base do prisma.

11. A função h é polinomial de 3.º grau, tem um zero duplo igual a -1, é divisível por $x - 4$ e sabe-se que $h(0) = 4$. Determine o conjunto-solução da inequação $h(x) > 0$ na forma de intervalo ou união de intervalos.

12. Seja g a função racional definida no seu domínio pela expressão $g(x) = \frac{2-4x}{2x+1}$

12.1. Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox.

12.2. Se escrever $g(x)$ na forma $a + \frac{b}{x+c}$ então os valores de a, b e c são iguais, respetivamente, a:

(A) $-2, 4$ e 1 **(B)** $-2, 2$ e 1 **(C)** $-2, 2$ e 0,5 **(D)** $-4, 5$ e 1

12.3. Sabe-se que a função j definida, no seu domínio, por $j(x) = g(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$, tem por contradomínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Qual é o valor de k? Justifique.

FIM

Questão	1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.1.	12.2.	12.3	Total
Cotação	10	10	12	16	12	14	10	16	10	14	10	16	16	12	10	12	200

SPM TESTES

Teste de Matemática 11.º ano 2026

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (quatro páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Qualquer que seja a progressão geométrica (u_n) de termos positivos, tal que:

$$u_{n+2} - u_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

a soma dos primeiros 1012 termos é igual a:

(A) $1012\,u_1$ **(B)** 1 **(C)** $2024\,u_1$ **(D)** 1012

2. No dia 1 de janeiro de 2020, foi iniciado um investimento com a duração de 5 anos.

- Em 1 de janeiro de 2020, foram depositados 1 000€.
- Em 1 de janeiro de cada um dos 4 anos seguintes $(2021, 2022, 2023\ e\ 2024)$, foram efetuados novos depósitos, de modo que os valores em euros do depósito inicial e dos novos depósitos efetuados nos anos seguintes constituem uma progressão aritmética de razão 100.
- O capital depositado em cada data é remunerado a uma taxa anual fixa de juro simples de 2%.

No final do investimento (em 1 de janeiro de 2025), o montante total acumulado, o que inclui os juros recebidos, é:

(A) 6 000€ **(B)** 6 300€ **(C)** 6 312€ **(D)** 6 340€

3. Na Figura 1 está representada a tracejado, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.

O ângulo de amplitude α radianos, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência trigonométrica;
- o ponto D tem coordenadas $(-1{,}0)$;
- o ponto B pertence ao segundo quadrante e tem a mesma ordenada do ponto A;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa do ponto B;
- $\overline{AB} = 2$.

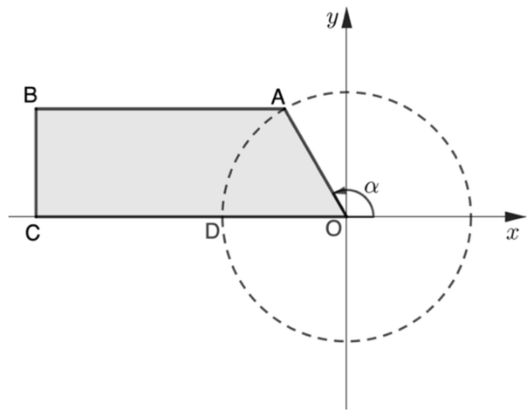

Figura 1

3.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCO]$, representada a sombreado, é dada em função de α por:

$$f(\alpha) = \frac{4\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

3.2. Seja $g(\alpha)$ a área do triângulo $[ABD]$.

Para um certo valor de α sabe-se que $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{9}{4}$

Determine, para esse valor de α, o valor exato das coordenadas do ponto A.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

4.1. Mostre que $f(x) = \sin x - \cos x$.

4.2. Sabendo que $\tan \beta = \frac{3}{4}$ e $\beta \in]-\pi, 0[$, calcule o valor de $f(\beta)$.

5. Considere as seguintes proposições:

I. Se α radianos for a amplitude de um ângulo orientado tal que $\sin \alpha > 0$ e $\tan \alpha < 0$ então $\cos(2026\pi - \alpha) < 0$

II. Se g for uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$g(x) = \sin(ax)$

em que a é um número real não nulo, tal que os únicos pontos onde g muda de sinal são os de abcissa $x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

então o período positivo mínimo de g é igual a π

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) As proposições **I** e **II** são falsas.

(B) A proposição **I** é falsa e a **II** é verdadeira.

(C) A proposição **I** é verdadeira e a **II** é falsa.

(D) As proposições **I** e **II** são verdadeiras.

6. Considere, num referencial o.n. xOy, as retas r e s e o ponto P.

Sabe-se que:

- $r: (x, y) = (1,1) + k(-1,3),\ k \in \mathbb{R}$
- $s: x + 2y - 13 = 0$
- o ponto P pertence à reta r e ao eixo Oy

Determine a distância de P a s.

7. Na Figura 2 está representada uma circunferência, uma reta r que não a interseta e um ponto X exterior a ambas.

Sabe-se que:

- Na circunferência estão assinalados seis pontos distintos A, B, C, D, E e F;
- Na reta r estão assinalados cinco pontos distintos P, Q, R, S e T;
- Os pontos P, A, D e X são colineares;
- Os pontos Q, B, C e X são colineares;
- Além das situações referidas, nenhuma reta do plano contém três ou mais dos doze pontos representados.

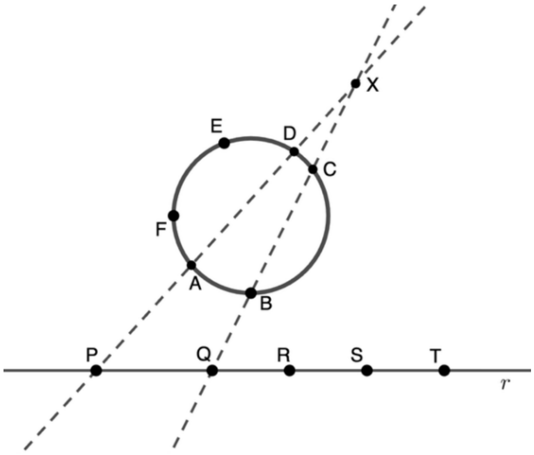

Figura 2

Considere apenas as posições relativas indicadas na figura.

O número de triângulos que se podem formar, tendo por vértices três dos doze pontos representados e exatamente um vértice na reta r, é:

(A) $5 \times {}^{7}C_{2} - 2 \times {}^{3}C_{2}$

(B) $5 \times {}^{7}C_{2}$

(C) $5 \times {}^{7}C_{2} - 2 \times {}^{3}C_{2} - {}^{4}C_{2}$

(D) $5 \times {}^{7}C_{2} - 2 \times {}^{3}C_{2} - 2 \times {}^{4}C_{2}$

8. Na Figura 3, está representada num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida no plano xOy.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy;
- o quadrilátero $[AOBP]$ é um losango de lado ℓ.

Mostre que $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AD} = \ell^2$

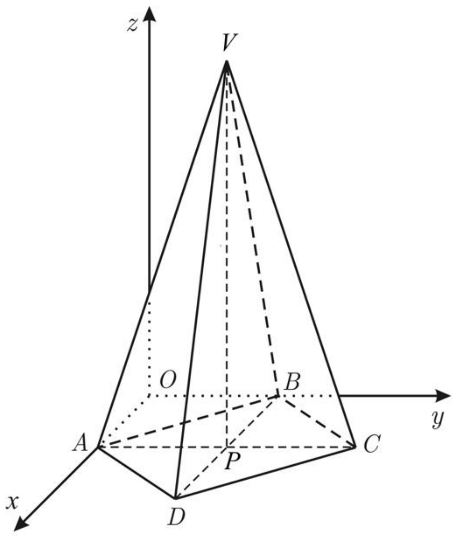

Figura 3

9. Considere a reta r e os planos α_t e β, definidos num referencial o.n. $Oxyz$, por:

- $r: (x, y, z) = (4, 0, 2) + k(2, -1, 1),\ k \in \mathbb{R}$
- $\alpha_t: x + y + tz - 2 = 0,\ t \in \mathbb{R}$
- $\beta: 2x - y + z - 3 = 0$

Considere agora as frases seguintes que se encontram incompletas relativamente às posições relativas consideradas em cada uma delas:

Para qualquer número real t diferente de -1, a reta r intersecta o plano α_t num único ponto. Quando $t = -1$, a reta r _______ α_t .

Não existe número real t tal que os planos α_t e β sejam _______ .

As expressões que completam, respetivamente, os espaços do texto, de modo a que se obtenham afirmações verdadeiras são:

(A) "*é estritamente paralela a*" e "*perpendiculares*”.
(B) "*está contida em*" e "*coincidentes*".
(C) "*é estritamente paralela a*" e "*coincidentes*".
(D) "*está contida em*" e "*perpendiculares*".

10. O volume de um prisma quadrangular regular é dado, para cada valor real positivo de x, por $V(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$ e a altura do mesmo prisma é dada por $A(x) = x + 3$. Determine a expressão, na forma de um polinómio em x, da medida da aresta da base do prisma.

11. A função h é polinomial de 3.º grau, tem um zero duplo igual a -1, é divisível por $x - 4$ e sabe-se que $h(0) = 4$. Determine o conjunto-solução da inequação $h(x) > 0$ na forma de intervalo ou união de intervalos.

12. Seja g a função racional definida no seu domínio pela expressão $g(x) = \frac{2-4x}{2x+1}$

12.1. Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox.

12.2. Se escrever $g(x)$ na forma $a + \frac{b}{x+c}$ então os valores de a, b e c são iguais, respetivamente, a:

(A) $-4, 5$ e 1 **(B)** $-2, 2$ e 0,5 **(C)** $-2, 2$ e 1 **(D)** $-2, 4$ e 1

12.3. Sabe-se que a função j definida, no seu domínio, por $j(x) = g(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$, tem por contradomínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Qual é o valor de k? Justifique.

FIM

Questão	1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.1.	12.2.	12.3	Total
Cotação	10	10	12	16	12	14	10	16	10	14	10	16	16	12	10	12	200