Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Apoio à avaliação [maio – 2026]

Matemática A

12.º ano de escolaridade

Nome: ______________________________________ | **N.º**: _______ | **Turma:** _______

Duração da prova: 150 minutos | **Tolerância:** 30 minutos | **Ano letivo:** 2025-2026

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado (*), cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

As respostas aos itens da prova são registadas no caderno de respostas.

A prova inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Assinala, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr

α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r: raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r: raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

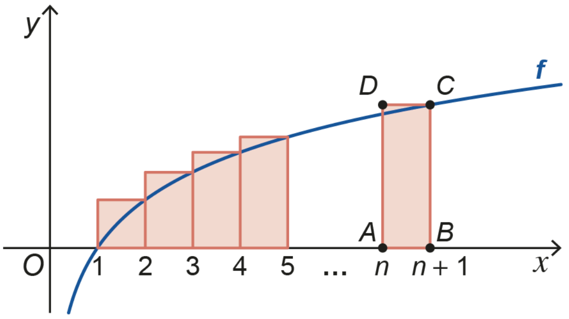
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representadas uma sequência de retângulos e uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_2 x$.



Sabe-se que:

- o retângulo $[ABCD]$ representa o retângulo de ordem n da sequência, com $n \geq 1$;
- as coordenadas dos vértices *A*, *B*, *C* e *D* são respetivamente, $(n, 0)$, $(n+1, 0)$, $(n+1, f(n+1))$ e $(n, f(n+1))$.

* **1.1.** Qual das opções representa o perímetro do retângulo de ordem 127?

(A) 7 **(B)** 14 **(C)** 16 **(D)** 18

* **1.2.** Seja (a_n) a sucessão em que cada termo é igual à medida da área do retângulo de igual ordem.

Mostra que a soma S_n dos primeiros n termos da sucessão (a_n) é dada por $S_n = \log_2((n+1)!)$.

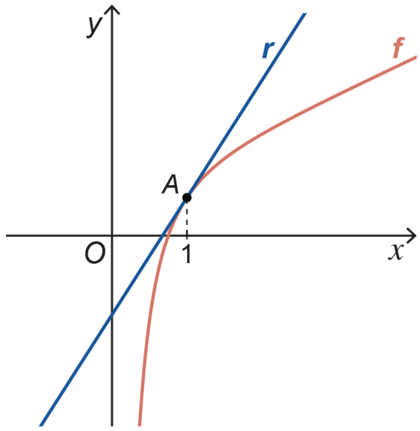
* **2.** Seja *f* uma função contínua e crescente, de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que o gráfico de *f* admite duas assíntotas: uma vertical e outra definida pela equação $y = 0{,}5x + 1$.

Completa as igualdades, assinalando a opção correta.

	Opções			
O resultado é:	**(A)** 0	**(B)** 2	**(C)** $\frac{1}{2}$	**(D)** 1
I. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$	○	○	○	○
II. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)} =$	○	○	○	○
III. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) =$	○	○	○	○

3. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. Oxy, o gráfico de uma função *f* e uma reta *r*.



Sabe-se que:

- o domínio da função *f* é $\mathbb{R}^+$ e que a função f é definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{2}$;
- a reta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *A*, de abcissa 1.

Resolve os itens **3.1.**, **3.2.** e **3.3.**, sem recorrer à calculadora, exceto para eventuais cálculos numéricos.

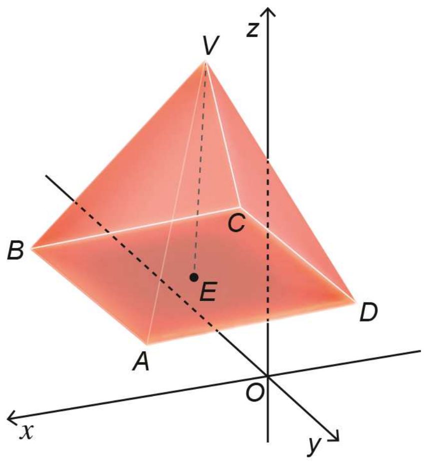
* **3.1.** Seja *P* o ponto de interseção da reta *r* com o eixo Ox. Determina as coordenadas do ponto *P*.

* **3.2.** Sabe-se que f'', função segunda derivada de f, é definida por $f''(x) = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^2}$.

Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e indica, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão.

* **3.3.** O gráfico de f admite uma assíntota não vertical. Determina, na forma reduzida, uma equação dessa assíntota.

* **4.** Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.



Sabe-se que:

- o vértice *A* tem coordenadas $(2, -3, 0)$;
- o vértice *B* tem coordenadas $(6, -1, 4)$;
- o vértice *D* tem coordenadas $(-2, -1, 2)$;
- o vértice *V* tem coordenadas $(0, -4, 7)$;
- o ponto *E* representa a projeção ortogonal do vértice *V* sobre a base da pirâmide.

Representa o plano que contém a base da pirâmide por uma equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, sendo a, b, c e d números reais.

5. Numa escola secundária existem exatamente duas atividades extracurriculares organizadas por clubes: o Clube de Fotografia e o Clube de Xadrez.

Sabe-se que:

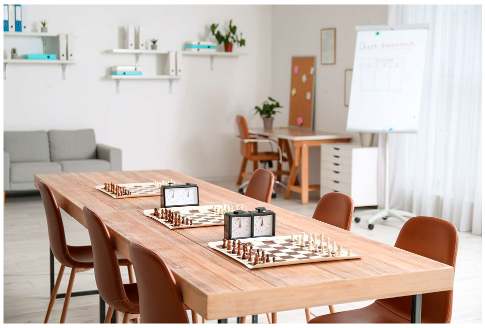
- 14% dos alunos da escola pertencem ao Clube de Fotografia;
- 18% dos alunos da escola pertencem ao Clube de Xadrez;
- 76% dos alunos da escola não frequentam qualquer um dos dois clubes.

* **5.1.** Escolhe-se, ao acaso, um aluno da escola. Qual é a probabilidade de ter sido escolhido um aluno do Clube de Fotografia, sabendo que esse aluno faz parte do Clube de Xadrez?

(A) $\frac{2}{5}$ **(B)** $\frac{4}{9}$

(C) $\frac{11}{25}$ **(D)** $\frac{5}{9}$

* **5.2.** Sabe-se que a escola tem 450 alunos e a terça parte dos alunos do Clube de Xadrez são raparigas.



O Clube de Xadrez vai organizar um torneio envolvendo todos os que fazem parte deste clube.

Para a abertura do torneio são escolhidos dois elementos do Clube.

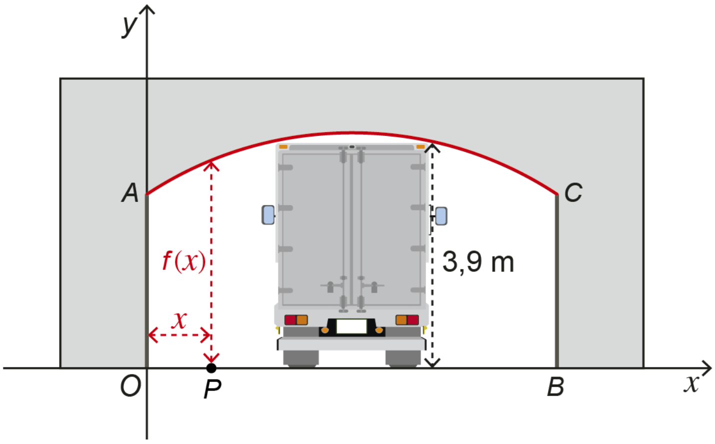
Qual é o número de diferentes escolhas com, pelo menos, uma rapariga?

A expressão seguinte representa a resposta à questão colocada.

$$^{27}C_2 + 27 \times 54$$

No contexto apresentado, indica o significado de cada uma das parcelas da expressão dada.

6. Na figura, em referencial o.n. Oxy, está representada a entrada de uma garagem de um armazém.



Sabe-se que:

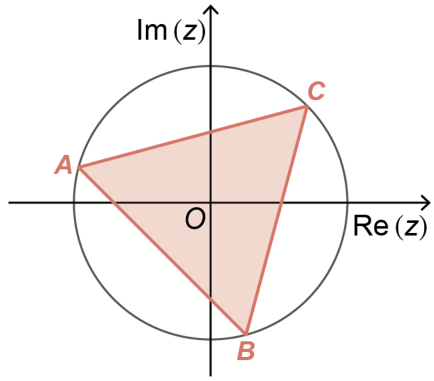
- nas laterais da entrada da garagem há dois pilares, da mesma altura, representados pelos segmentos de reta $[OA]$ e $[BC]$;
- o arco AC coincide com a representação gráfica de uma função f, tal que $f(x) = 5 - 0,5\left(e^{1-0,25x} + e^{0,25x-1}\right)$, sendo x a abcissa de P, um ponto qualquer pertencente a $[OB]$, e $f(x)$ a distância, em metros, de P ao arco AC.

* **6.1.** Seja T o ponto do gráfico de f que está a maior distância do eixo Ox.
Por processos exclusivamente analíticos, determina as coordenadas do ponto T.

* **6.2.** Um camião, com $3,9$ m de altura, consegue entrar na garagem, tal como é sugerido na figura.
Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina, em metros e arredondado às décimas, a largura máxima da caixa do camião.
Na tua resposta:

- apresenta uma equação que te permita resolver o problema;
- representa, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinala o(s) ponto(s) relevante(s) que te permite(em) resolver a equação;
- apresenta a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às milésimas.

* **7.** Na figura está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero [*ABC*], cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial.



Sabe-se que:

- *A*, *B* e *C* são os afixos das raízes cúbicas de um certo número complexo w;
- *A* é o afixo do número complexo $z_A = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

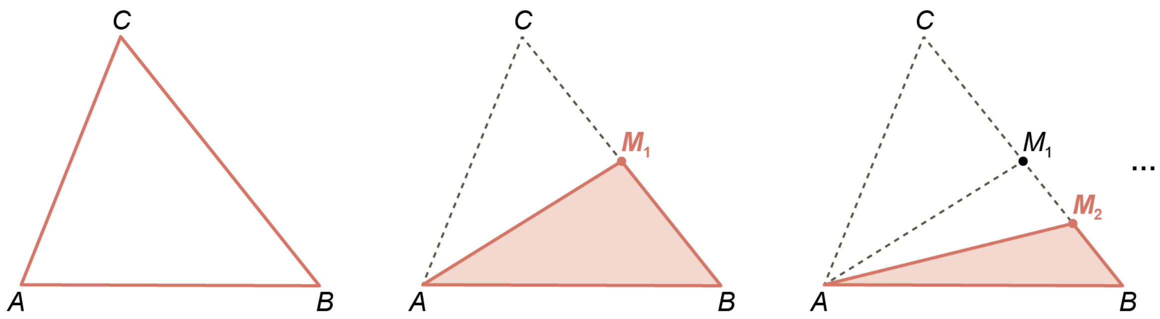
Completa o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com a informação dada.
Escreve, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada.
A cada espaço corresponde uma só opção.

> No plano complexo, o quadrante a que pertence o afixo do número complexo w é o ___I___ e w, na forma algébrica, pode ser representado por ___II___ .
>
> O argumento positivo mínimo do número complexo, cuja imagem geométrica é *B*, é igual a ___III___ .
>
> O número complexo que tem afixo o ponto *C* pode ser representado na forma algébrica por ___IV___ .

I	II	III	IV
a) 1.º quadrante **b)** 2.º quadrante **c)** 4.º quadrante	**a)** $-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$ **b)** $-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,i$ **c)** $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$	**a)** $\frac{5\pi}{4}$ **b)** $\frac{19\pi}{12}$ **c)** $-\frac{5\pi}{12}$	**a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\,i$ **c)** $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

8. AE-2023

A partir de um triângulo [*ABC*] construiu-se uma sequência de triângulos a partir de um triângulo [*ABC*].



Considera:

- [AM_1] uma mediana do triângulo [*ABC*], obtendo-se o triângulo [ABM_1];
- [AM_2] uma mediana do triângulo [ABM_1], obtendo-se o triângulo [ABM_2];
- e assim sucessivamente.

O lado [*AB*] é comum a todos os triângulos da sequência e, em cada triângulo, depois do primeiro, a medida do lado oposto a *A* é metade da medida do lado oposto a *A* no triângulo anterior.

Considera a medida da área do triângulo [*ABC*] igual a 15.

Seja (a_n) a sucessão das medidas das áreas dos triângulos da sequência (infinita).

Justifica que sucessão (a_n) é uma progressão geométrica e calcula a soma de todos os termos da sucessão.

9. AE-2018

Para um certo número real θ pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o número complexo $z = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ é solução da equação $1 - 2\mathrm{Re}(z) = 0$.

Sem recorrer à calculadora, resolve a equação.

10. AE-2023

O João vendeu um terreno por 40 000 € e investiu esse dinheiro num depósito a prazo, na modalidade de juro composto, com uma taxa de juro anual de 2%, com capitalizações trimestrais.

Qual das opções representa o capital acumulado ao fim de cinco anos, nas condições indicadas?

(A) $40\ 000 \times (1 + 5 \times 0{,}02)$

(B) $40\ 000 \times \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^4 \times 5$

(C) $40\ 000 \times \left(1 + \frac{0{,}02}{20}\right)^4$

(D) $40\ 000 \times \left(1 + \frac{0{,}02}{4}\right)^{20}$

11. AE-2018

Uma linha do Triângulo de Pascal tem 23 elementos.

Qual das opções representa a diferença entre o maior elemento e o penúltimo elemento dessa linha?

(A) 705 410 **(B)** 646 624 **(C)** 646 624 **(D)** 704 431

12. AE-2023

Considera a equação $\log x = 3 - x$.

Sabe-se que a equação tem uma única solução e que pertence ao intervalo $]2, 3[$.

Recorre ao método da bisseção e determina um intervalo do tipo $]a, b[$ tal que possas garantir que a é um valor aproximado por defeito da solução da equação com um erro inferior a 0,1.

13. AE-2018

Para um dado número real k, sabe-se que $\lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^{2n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Determina o valor de k.

Cotações

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	14	14	12	14	12	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**8.**		**9.**		**10.**		**11.**		**12.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3×14 pontos												**42**
Total													**200**