Respostas aos itens de seleção

	(A)	(B)	(C)	(D)
* Item 1.1.	○	○	●	○
* Item 2.				
I.	○	○	●	○
II.	●	○	○	○
III.	○	○	○	●
* Item 5.1.	○	●	○	○
* Item 7.	a)	b)	c)	
I.	○	●	○	
II.	●	○	○	
III.	○	●	○	
IV.	○	○	●	
	(A)	(B)	(C)	(D)
Item 10.	○	○	○	●
Item 11.	●	○	○	○

Resposta ao * ITEM 1.2.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 4 + \cdots + \log_2 (n+1)$

$\log_2 (2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n+1)) = \log_2 ((n+1)!)$

Assim, $S_n = \log_2 ((n+1)!)$.

Resposta ao * ITEM 3.1.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{2}$

As coordenadas do ponto *A* são $(1, f(1))$, ou seja, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

O declive da reta r é igual a $f'(1)$.

$f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2}$

$f'(1) = \dfrac{3}{2}$. A reta *r* é definida por uma equação do tipo $y = \dfrac{3}{2}x + b$.

O ponto *A*, de coordenadas $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, pertence à reta *r*. Então, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = -1$.

Assim, a reta *r* é definida pela equação $y = \dfrac{3}{2}x - 1$. Se $y = 0$, tem-se $x = \dfrac{2}{3}$.

O ponto *P* tem coordenadas $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

Resposta ao * ITEM 3.2.

$f''(x) = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^2} \wedge x > 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = e\sqrt{e}$

x	0		$e\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		–	0	+
f		$\cap$	$f(e\sqrt{e})$	$\cup$

Para $x \in \left]0, e\sqrt{e}\right]$, a concavidade do gráfico de *f* é voltada para baixo.

Para $x \in \left[e\sqrt{e}, +\infty\right[$, concavidade do gráfico de *f* é voltada para cima.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão, cuja abcissa é $e\sqrt{e}$.

Resposta ao * ITEM 3.3.

Equação da assíntota: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} = 0 \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Uma equação da assíntota é $y = \frac{1}{2}x$.

Resposta ao * ITEM 4.

O ponto médio de $[BD]$ é igual a E .

Assim, as coordenadas do ponto E são $\left(\frac{6-2}{2}, \frac{-1-1}{2}, \frac{4+2}{2} \right)$, ou seja, $(2, -1, 3)$.

O vetor $\overrightarrow{EV}$ é normal ao plano que contém a base da pirâmide.

$\overrightarrow{EV} = V - E = (0, -4, 7) - (2, -1, 3) = (-2, -3, 4)$

Uma equação do plano que contém a base da pirâmide é: $-2x - 3y + 4z + d = 0$.

O ponto E tem coordenadas $(2, -1, 3)$, pertence ao plano.

Logo, $-2 \times 2 - 3 \times (-1) + 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$.

O plano pedido tem equação $-2x - 3y + 4z - 11 = 0$.

Resposta ao * ITEM 5.2.

Número de alunos do Clube de Xadrez: $0{,}18 \times 450 = 81$

Número de raparigas do Clube de Xadrez: $81 : 3 = 27$

Número de rapazes do Clube de Xadrez: $81 - 27 = 54$

Podem ser feitas escolhas envolvendo:

Duas raparigas **ou** Uma rapariga e um rapaz

Esta condição pode ser traduzida por:

$$\underbrace{{}^{27}C_2}_{\text{N.º de escolhas com duas raparigas}} + \underbrace{27 \times 54}_{\text{N.º de escolhas com uma rapariga e um rapaz}}$$

Resposta ao * ITEM 6.1.

$f(x) = 5 - 0{,}5\left(e^{1-0{,}25x} + e^{0{,}25x-1}\right)$

$f'(x) = -0{,}5\left(-0{,}25e^{1-0{,}25x} + 0{,}25e^{0{,}25x-1}\right)$

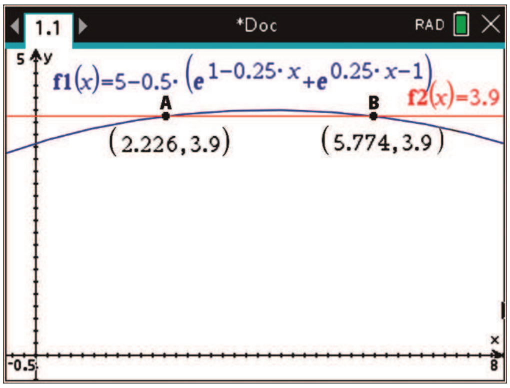
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}25e^{0{,}25x-1} = 0{,}25e^{1-0{,}25x} \Leftrightarrow 0{,}25x - 1 = 1 - 0{,}25x \Leftrightarrow 0{,}5x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

x	0		4		8
$f'(x)$		+	0	–	
f		↗	$f(4) = 4$	↘	

O ponto T tem coordenadas $(4, 4)$.

Resposta ao * ITEM 6.2.

Para determinar os pontos do gráfico de f em que a ordenada é igual à altura do camião. Para tal, basta resolver a equação $f(x) = 3{,}9$.



Da resolução gráfica resultam os pontos A e B, em que a distância entre eles terá de ser superior à largura do camião.

$\overline{AB} \approx 5{,}774 - 2{,}226$, ou seja, $\overline{AB} \approx 3{,}548$

A largura do camião, arredondado às décimas, não deve ultrapassar os 3,5 metros.

Resposta ao ITEM 8.

Sabe-se que num triângulo qualquer mediana decompõe o triângulo em dois triângulos equivalentes (com a mesma área). Assim, a área de qualquer triângulo da sequência, a partir do primeiro, é metade da área do triângulo anterior.

A sucessão (a_n) pode ser definida por: $\begin{cases} a_1 = 15 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, \ n \geq 1 \end{cases}$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 15.

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 15 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = 30 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\lim S_n = \lim\left(30 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) = 30 \times 1 - 0 = 30$$

A soma das medidas de todas as áreas é igual a 30.

Resposta ao ITEM 9.

$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $z = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3$

$$z = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)} = \cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)$$

$$1 - 2\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos(3\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(3\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3\theta) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi + 6k\pi}{9} \vee \theta = \frac{-\pi + 6k\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, as únicas soluções são para $k = 1$, ou seja, $\theta = \frac{7\pi}{9}$ e $\theta = \frac{5\pi}{9}$.

Resposta ao ITEM 12.

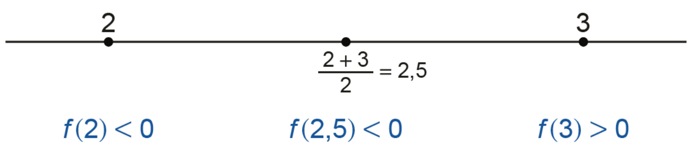
$\log x = 3 - x \Leftrightarrow \log x + x - 3 = 0$

Seja f a função definida por $f(x) = \log x + x - 3$

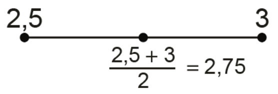
O domínio é $\mathbb{R}^+$ e f é contínua por ser a soma de funções contínuas (uma logarítmica e outra polinomial).

Então, f é contínua em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$.

A solução pertence ao intervalo $]2, 3[$.

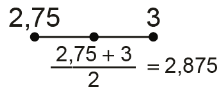


A solução pertence ao intervalo $]2{,}5\,;\,3[$.



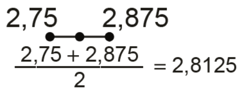
$f(2{,}5)<0$ $\quad f(2{,}75)<0$ $\quad f(3)>0$

A solução pertence ao intervalo $]2{,}75\,;\,3[$.



$f(2{,}75)<0$ $\quad f(2{,}875)>0$ $\quad f(3)>0$

A solução pertence ao intervalo $]2{,}75\,;\,2{,}875[$.



$f(2{,}8125)<0$ $\quad f(2{,}875)>0$

Então, a solução pertence ao intervalo $]2{,}8125\,;\,2{,}875[$

Como $8{,}875-2{,}813\approx 0{,}062<0{,}1$, conclui-se que 2,8125 é um valor aproximado da solução da equação, por defeito, com um erro inferior a 0,1.

Resposta ao ITEM 13.

$$\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(e^{k}\right)^{2}=e^{2k}$$

Como $e^{2k}=\frac{1}{e}$, tem-se:

$$e^{2k}=e^{-1}\Leftrightarrow 2k=-1\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$$

O valor de k é $-\frac{1}{2}$.