Teste de avaliação n.º 5

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome:	**N.º:**	**Turma:**
Duração do teste: 90 minutos	**Tolerância:** 10 minutos	**Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. No plano complexo, considere o ponto A, afixo de $z \neq 0$.
Seja B o afixo de $\mathrm{i}z$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O triângulo $[OAB]$ é isósceles e retângulo em A.

(B) O triângulo $[OAB]$ é retângulo em O.

(C) Os pontos A, B e O são colineares.

(D) A área do triângulo $[OAB]$ depende do argumento de z.

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número:

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}$$

Determine, na forma trigonométrica, as soluções da equação $w^2 = z^2$.

3. Considere, no plano complexo, o conjunto:

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| \leq 2 \land 0 \leq \operatorname{Arg}(z + \mathrm{i}) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Qual é o perímetro de D?

(A) $2 + \pi$ **(B)** $2 + 2\pi$

(C) $4 + \pi$ **(D)** $4 + 2\pi$

4. Considere o desenvolvimento do binómio $(x + x^{-1})^{10}$.
Qual das expressões seguintes é igual ao coeficiente do termo em x^4 desse desenvolvimento?

(A) ${}^{10}C_2$ **(B)** ${}^{10}C_4$ **(C)** ${}^{10}C_6$ **(D)** ${}^{10}C_7$

5. Uma biblioteca escolar vai oferecer um livro a cada um dos 5 utentes mais frequentes, sendo todos os livros distintos.

Para esse efeito, a biblioteca dispõe de:

- 6 romances distintos;
- 4 livros históricos distintos;
- 5 livros de viagens distintos.

Pretende-se que a oferta respeite, simultaneamente, as seguintes condições:

- inclua exatamente 2 romances;
- os restantes 3 livros sejam escolhidos de entre os livros históricos e de viagens, não podendo ser todos do mesmo tipo.

A expressão seguinte representa o número total de formas possíveis de selecionar os cinco livros e de atribuir um livro a cada utente, respeitando as condições enunciadas.

$$^{6}C_{2} \times \left(^{4}C_{1} \times ^{5}C_{2} + ^{4}C_{2} \times ^{5}C_{1} \right) \times 5!$$

Explique, no contexto descrito, cada fator desta expressão.

6. Para despistar uma determinada alergia, é realizada uma análise ao sangue a um grupo de pessoas.

Sabe-se que 8% das pessoas desse grupo têm efetivamente a alergia.

A análise realizada apresenta alguma margem de erro:

- apresenta uma taxa de falsos negativos de 8%, isto é, entre as pessoas que têm a alergia, 8% obtêm resultado negativo;
- apresenta uma taxa de falsos positivos de 6%, isto é, entre as pessoas que não têm a alergia, 6% obtêm resultado positivo.

Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa desse grupo e realiza-se a análise.

Determine as probabilidades de a pessoa ter a alergia, sabendo que o resultado da análise foi negativo e de não ter a alergia, sabendo que o resultado da análise foi positivo.

Comente os resultados obtidos e interprete o seu significado no contexto da situação descrita.

7. Um professor tem, no seu estojo, 7 marcadores distintos: 3 pretos, 2 vermelhos, 1 azul e 1 verde.
Retira, ao acaso e simultaneamente, 2 marcadores.

Determine a probabilidade de os dois marcadores retirados não serem da mesma cor.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sin^2 x$$

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.
Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números **I, II** e **III** seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A função f pode ser definida por $f(x) =$ __**I**__ .
A função f', primeira derivada da função f pode ser definida por $f'(x) =$ __**II**__.
Os minimizantes de f são os pontos da forma __**III**__, $k \in \mathbb{Z}$.

I	II	III
a) $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ **b)** $\frac{1+\cos(2x)}{2}$ **c)** $1-\cos(2x)$	**a)** $\sin(2x)$ **b)** $-2\sin(x)\cos(x)$ **c)** $\cos(2x)$	**a)** $\frac{k\pi}{2}$ **b)** $k\pi$ **c)** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

9. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Determine os números reais que são solução da equação:

$$(e^x - 1)\ln(x+2) = \ln[(x+2)^2]$$

10. Considere, para um certo valor de $k \in \mathbb{R}$, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

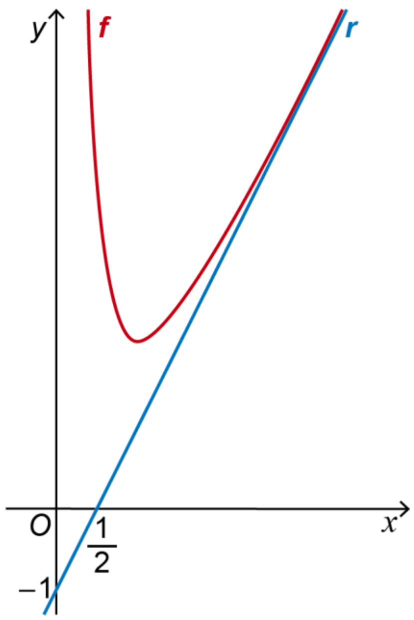
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + k & \text{se} \quad x < 1 \\ x + \dfrac{2}{x} - 2\ln x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva estes itens sem recorrer à calculadora.

10.1. Determine o valor de k de modo que a função f seja contínua.

10.2. Estude, no intervalo $]1, +\infty[$, a função f quanto à monotonia e averigue da existência de extremos relativos.

11. Na figura está representado, em referencial o. n. Oxy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e a sua assíntota não vertical, r, quando $x \to +\infty$.



Sabe-se que:

- f é par;
- r passa pelos pontos de coordenadas $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Qual é o valor de

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(-x)f(x) - 2xf(-x)}{x} ?$$

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 2 **(D)** -2

12. Numa experiência laboratorial, a intensidade de um sinal registado por um sensor, x minutos após o início da experiência, é modelada pela função f, definida por:

$$f(x) = \ln(x+1) + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \sin x \,,\; x \geq 0$$

Resolva este item recorrendo à calculadora gráfica.

Determine os valores de x, em minutos, nos primeiros 5 minutos da experiência, para os quais a intensidade do sinal registada num instante correspondente ao dobro do tempo x é, pelo menos, uma unidade inferior à intensidade registada ao fim de x minutos.

Apresente a resposta na forma de intervalo com extremos arredondados às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma inequação que lhe permita resolver o problema;

– represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a inequação;

– apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Mostre que a reta tangente ao gráfico de f, num ponto qualquer do seu gráfico, define com os eixos coordenados um triângulo de área constante.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**11.**	**12.**	**13.**	**Total**
10	15	10	10	15	20	15	15	20	15	15	10	15	15	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

Multiplicar um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no sentido positivo do seu afixo, preservando o módulo. Logo, triângulo $[OAB]$ é retângulo em O.

Opção (B)

2.

$$\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \\ \left(1,\sqrt{3}\right) \in 1.\text{º Q.} \end{cases} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{1}{1} \\ (1,1) \in 1.\text{º Q.} \end{cases} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \text{ e } z^2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

Como $w^2 = z^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, as soluções da equação são da forma

$$w = \sqrt{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}}, \qquad k \in \{0,1\}$$

$$w_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{2}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$$

As soluções da equação são $w_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ e $w_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

Em alternativa, como $w^2 = z^2 \Leftrightarrow w^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (w-z)(w+z) = 0$, vem que $w = z \vee w = -z$.

Assim,

$$w_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$

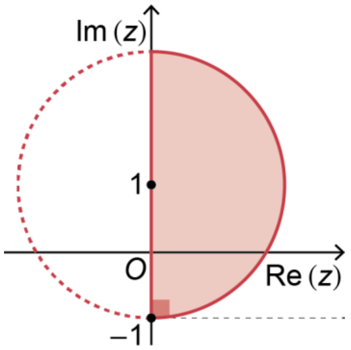
$$w_1 = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$$

As soluções da equação são $w_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ e $w_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

3.

$|z - \mathrm{i}| \leq 2 \rightarrow$ círculo de centro no afixo de i e com raio 2 .

$0 \leq \mathrm{Arg}(z + \mathrm{i}) \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow$ setor angular com vértice em $-\mathrm{i}$ e amplitude entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.



O perímetro de D, que é um semicírculo de raio 2, é $2 \times 2 + \frac{2\pi \times 2}{2} = 4 + 2\pi$.

Opção (D)

4. Termo geral: ${}^{10}C_p \times x^{10-p} \times (x^{-1})^p = {}^{10}C_p \times x^{10-p} \times x^{-p} = {}^{10}C_p \times x^{10-2p}$

Quer-se que $10 - 2p = 4 \Leftrightarrow p = 3$

Logo, o coeficiente procurado é: ${}^{10}C_3 = {}^{10}C_{10-3} = {}^{10}C_7$

Opção (D)

5. No contexto descrito, ${}^{6}C_2$ representa o número de formas de escolher, de entre os 6 romances distintos disponíveis, os 2 romances que farão parte da oferta.

Na expressão entre parênteses, consideram-se os dois casos possíveis para a escolha dos restantes 3 livros, uma vez que estes são escolhidos de entre os livros históricos e de viagens, não podendo ser todos do mesmo tipo.

Assim, ${}^{4}C_1 \times {}^{5}C_2$, representa o número de formas de escolher 1 livro histórico, de entre os 4 disponíveis, e 2 livros de viagens, de entre os 5 disponíveis.

Por sua vez, ${}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1$ representa o número de formas de escolher 2 livros históricos, de entre os 4 disponíveis, e 1 livro de viagens, de entre os 5 disponíveis.

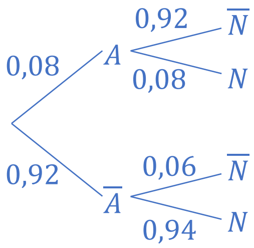
A soma ${}^{4}C_1 \times {}^{5}C_2 + {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1$ representa, portanto, o número total de formas de escolher os 3 livros que não são romances.

Finalmente, $5!$ representa o número de formas de atribuir os 5 livros escolhidos aos 5 utentes mais frequentes, recebendo cada utente exatamente um livro.

Logo, a expressão dada representa o número total de formas possíveis de selecionar os 5 livros nas condições indicadas e de os atribuir aos 5 utentes.

6. A: "ter a alergia"

N: "o resultado da análise ser negativo"



$$P(A|N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A \cap N)}{P(A \cap N) + P(\bar{A} \cap N)} = \frac{0{,}08 \times 0{,}08}{0{,}08 \times 0{,}08 + 0{,}92 \times 0{,}94} \approx 0{,}01$$

$$P(\bar{A}|\overline{N}) = \frac{P(\bar{A} \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{P(\bar{A} \cap \overline{N})}{P(A \cap \overline{N}) + P(\bar{A} \cap \overline{N})} = \frac{0{,}92 \times 0{,}06}{0{,}08 \times 0{,}92 + 0{,}92 \times 0{,}06} \approx 0{,}43$$

Verifica-se que a probabilidade de a pessoa ter a alergia, sabendo que o resultado foi negativo, é muito reduzida (cerca de 1%), enquanto a probabilidade de a pessoa não ter a alergia, sabendo que o resultado foi positivo, é bastante superior (cerca de 43%).

Assim, é muito mais provável que uma pessoa com resultado positivo não tenha a alergia do que uma pessoa com resultado negativo tenha a alergia.

Estes resultados explicam-se pelo facto de a alergia ser pouco frequente na população considerada, o que faz com que, apesar de o teste apresentar uma baixa taxa de erro, o número de falsos positivos seja ainda significativo.

7.

$$P(\text{"não serem da mesma cor"}) = 1 - P(\text{"serem da mesma cor"}) = 1 - \frac{{}^3C_2 + {}^2C_2}{{}^7C_2} = \frac{17}{21}$$

8. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{\cos(2x) - 1}{-2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$

$D'_f = [0, 1]$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

I. – a)

II. – a)

III. – b)

9. $(e^x - 1)\ln(x+2) = \ln[(x+2)^2] \Leftrightarrow (e^x - 1)\ln(x+2) = 2\ln(x+2) \wedge x+2>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (e^x - 1)\ln(x+2) - 2\ln(x+2) = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow (e^x - 1 - 2)\ln(x+2) = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (e^x - 3)\ln(x+2) = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow (e^x - 3 = 0 \vee \ln(x+2) = 0) \wedge x > -2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (e^x = 3 \vee x + 2 = 1) \wedge x > -2 \Leftrightarrow (x = \ln 3 \vee x = -1) \wedge x > -2$

As soluções da equação são $x = \ln 3$ e $x = -1$.

10.1. Se $x < 1$ e se $x > 1$, f é contínua por ser o resultado de operações entre funções contínuas nesses intervalos.

Em $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 + \frac{2}{1} - 2\ln 1 = 3 - 2\times 0 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1} + k\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} + k = \lim_{y\to 0^-}\frac{e^y - 1}{y} + k = 1 + k$$

$y = x - 1$
$y \to 0^-$

Para que f seja contínua, $1 + k = 3 \Leftrightarrow k = 2$.

10.2. Para $x > 1$,

$$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x} - 2\ln x\right)' = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \vee x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$$

x	1		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$f(1+\sqrt{3})$ Mín.	$\nearrow$

Para $x > 1$, f é estritamente decrescente em $]1, 1+\sqrt{3}]$ e estritamente crescente em $[1+\sqrt{3}, +\infty[$.

f tem um mínimo relativo em $x = 1 + \sqrt{3}$.

11. $m_r = \frac{-1+0}{0-\frac{1}{2}} = 2$

Equação da assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$: $y = 2x - 1$.

Como f é par, a equação da assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to -\infty$ é $y = -2x - 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(-x)f(x)-2xf(-x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(-x)[f(x)-2x]}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)[f(x)-2x]}{x} =$

Como f é par, $f(-x) = f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \times (-1) = 2 \times (-1) = -2$

Opção (D)

12. Sejam:

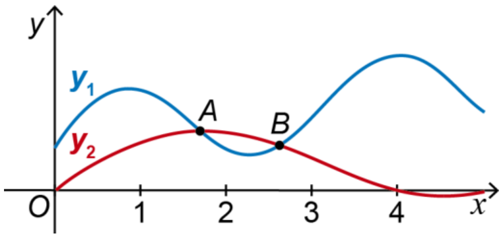
x_0 o instante pedido.

$f(2x_0)$: a intensidade do sinal registada ao fim do dobro desse instante;

$f(x_0) - 1$: a intensidade do sinal registada ao fim do dobro desse tempo é, pelo menos, uma unidade inferior à intensidade registada ao fim de x_0 minutos.

Domínio da inequação: $[0, 5]$

$\underbrace{f(2x_0)}_{y_1} \leq \underbrace{f(x_0) - 1}_{y_2}$



$A(1{,}70;\ 1{,}41)$ e $B(2{,}63;\ 1{,}05)$

A condição é verificada no intervalo $[1{,}7;\ 2{,}6]$.

13. Seja $a \neq 0$ a abcissa de um ponto qualquer do gráfico de f.

Então, esse ponto tem coordenadas $\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$.

Como $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, o declive da reta tangente nesse ponto é $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Logo, a equação da reta tangente é:

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

Para $x = 0$, obtém-se o ponto de interseção da reta com o eixo Oy:

$$y = -\frac{0}{a^2} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a} \longrightarrow \left(0, \frac{2}{a}\right)$$

Para $y = 0$, obtém-se o ponto de interseção da reta com o eixo Ox:

$$0 = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{x}{a^2} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow x = 2a \longrightarrow (2a, 0)$$

A reta tangente define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos $|2a|$ e $\left|\frac{2}{a}\right|$, logo a área do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \times |2a| \times \left|\frac{2}{a}\right| = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

Como este valor não depende de a, conclui-se que a reta tangente ao gráfico de f, num ponto qualquer do seu gráfico, define com os eixos coordenados um triângulo de área constante.