

**Teste de avaliação n.º 5****Matemática A****11.º ANO DE ESCOLARIDADE**

---

**Nome:****| N.º:****| Turma:**

---

**Duração do teste:** 90 minutos **| Tolerância:** 10 minutos**| Ano Letivo:** 2025/26

---

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

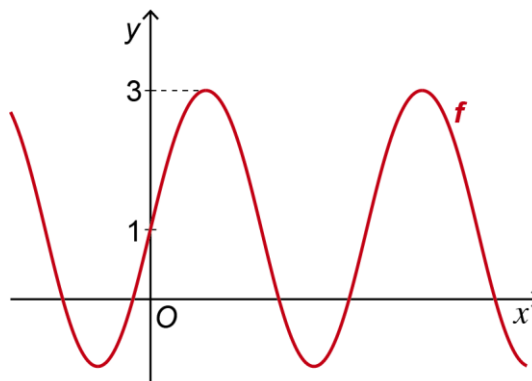
Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Na figura está representado o gráfico de uma função  $f$ , definida em  $\mathbb{R}$ , do tipo  $f(x) = a + b \sin(cx)$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ .



Sabe-se que:

- o gráfico de  $f$  intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1;
- o período mínimo fundamental de  $f$  é  $\pi$ ;
- o máximo de  $f$  é 3.

Seja  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$  tal que  $\cos(2\alpha) = \frac{3}{5}$ .

Determine o valor exato de  $f(\alpha)$ .

2. Num referencial o. n.  $Oxyz$ , consideram-se os pontos:

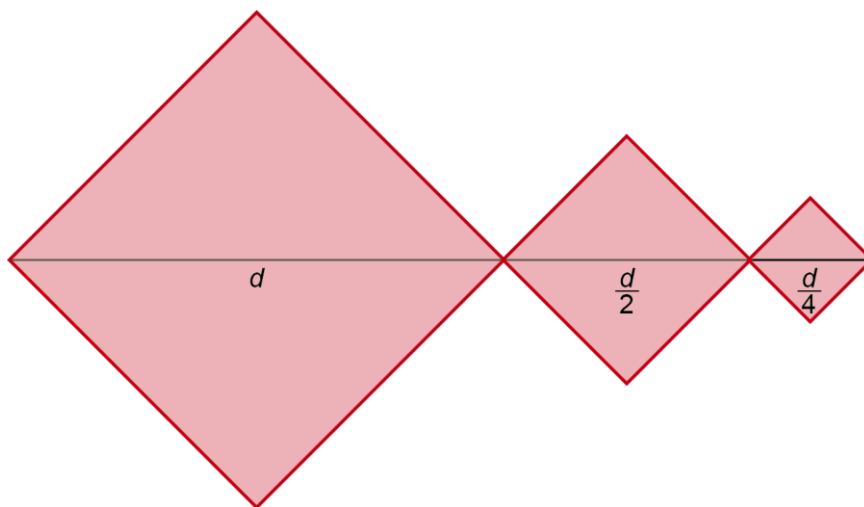
$$A(1, 0, 1) \text{ e } B(3, 2, -1)$$

Seja  $P$  um ponto de coordenadas  $(x, y, 0)$ , tal que o triângulo  $APB$  é retângulo em  $P$ .

Qual das seguintes condições é satisfeita por  $x$  e  $y$ ?

- (A)  $(x - 1)(x - 3) + y(y - 2) + 1 = 0$
- (B)  $(x - 1)(x - 3) - y(y - 2) - 1 = 0$
- (C)  $(x - 1)(x - 3) + y(y - 2) - 1 = 0$
- (D)  $(x - 1)(x - 3) - y(y - 2) + 1 = 0$

3. Numa escola, de 6 alunos do 11.º ano e de 5 alunos do 12.º ano vai ser formado um grupo de alunos para organizar o Dia Aberto da Escola.
- 3.1. Qual das seguintes expressões representa o número de formas de escolher um grupo de 4 alunos com pelo menos um aluno de cada ano?
- (A)  ${}^{11}C_4 - {}^6C_4 - {}^5C_4$
- (B)  ${}^{11}A_4 - {}^6A_4 - {}^5A_4$
- (C)  ${}^5A_1 + {}^5A_2 + {}^5A_3 + {}^5A_4$
- (D)  ${}^5C_1 \times 3 + {}^5C_2 \times 2 + {}^5C_3 + {}^5C_4$
- 3.2. Considere agora que se pretende formar um grupo de  $n$  alunos ( $n \geq 2$ ).  
 Mostre que o número de grupos que se podem formar e que incluem um número ímpar de alunos do 11.º ano é um número par.
4. Considere uma sucessão infinita de figuras geométricas, construídas com quadrados. Na figura, estão representadas as três primeiras figuras da sucessão.



Tal como é ilustrado na figura:

- as diagonais dos quadrados são colineares;
- o comprimento da diagonal do primeiro quadrado é  $d$ ;
- o comprimento da diagonal do segundo quadrado é metade do comprimento da diagonal do quadrado anterior;
- e assim sucessivamente, com os quadrados seguintes da sucessão.

Mostre que:

- 4.1. a soma dos comprimentos de todas as diagonais dos quadrados da sucessão é igual ao dobro do comprimento da diagonal do primeiro quadrado.
- 4.2. a sucessão das áreas dos quadrados é uma progressão geométrica e indique a respetiva razão.

5. Considere uma progressão aritmética  $(a_n)$  tal que:

$$a_2 - a_3 = 4 \text{ e } a_8 = -8$$

Determine a soma de todos os termos positivos da progressão.

6. Considere o polinómio  $P(x) = x^3 - 4x^2 + kx + 4$ .

6.1. Determine o valor de  $k$  de modo que  $P(x)$  seja divisível por  $x - k$ .

6.2. Seja  $k = 2$ .

Qual é a multiplicidade do zero  $x = 2$  do polinómio  $P(x)$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4

7. Considere as funções  $f$  e  $g$ , de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números **I**, **II** e **III** seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A função  $f$  é   **I**   em  $]-\infty, 0[$  e em  $]0, +\infty[$ .

O gráfico da função  $g$  tem duas assíntotas de equação   **II**  .

O domínio da função  $\frac{f}{g}$  é   **III**  .

I	II	III
<b>a)</b> positiva e decrescente	<b>a)</b> $x = 1$ e $y = 2$	<b>a)</b> $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
<b>b)</b> decrescente	<b>b)</b> $x = 2$ e $y = 1$	<b>b)</b> $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
<b>c)</b> positiva	<b>c)</b> $x = 0$ e $y = 3$	<b>c)</b> $\mathbb{R} \setminus \left\{0, 1, -\frac{1}{2}\right\}$

8. Seja  $f$  a função racional definida por:

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{6-3x}$$

Considere as proposições seguintes.

- I. 2 é um zero da função  $f$ .
- II.  $f$  é positiva em  $]0, +\infty[$ .

Justifique que as proposições I. e II. são falsas, apresentando, para cada uma delas, uma razão que justifique a sua falsidade.

9. Seja  $f$  uma função real de variável real, definida em  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que a taxa média de variação de  $f$  no intervalo  $[1, 5]$  é igual a 2.

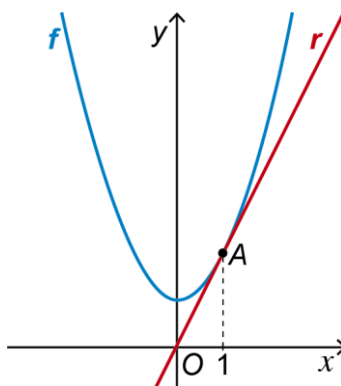
Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) A função  $f$  é crescente no intervalo  $[1, 5]$ .
- (B) Existe pelo menos um ponto  $c \in ]1, 5[$  tal que  $f(c) > f(1)$ .
- (C) Para todo o  $x \in ]1, 5[$ , tem-se  $f'(x) = 2$ .
- (D)  $f(5) = 8 + f(1)$

10. Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = 2x + (x-1)^2$$

Na figura está representado, em referencial o. n.  $Oxy$ , o gráfico de  $f$  e a reta  $r$ , tangente ao seu gráfico num ponto  $A$  de abcissa 1.



Determine a equação reduzida da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A$ .

**11.** Uma peça metálica é retirada de um forno e colocada numa sala com temperatura ambiente constante de 20 °C.

A temperatura da peça, em °C,  $x$  horas após esse instante, é modelada pela função racional  $f$ , definida por:

$$f(x) = 20 + \frac{90}{x^3 + 2x + 1}, x \geq 0$$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $x$  para o qual, uma hora depois, a diferença entre a temperatura da peça e a temperatura ambiente é metade da diferença observada nesse instante.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

**FIM**

**COTAÇÕES**

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	5.	6.1.	6.2.	7.	8.	9.	10.	11.	Total
15	10	10	15	15	15	15	20	10	15	15	10	15	20	<b>200</b>

## SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

$$1. f(0) = 1 \Leftrightarrow a + b \sin(c \times 0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\frac{2\pi}{c} = \pi \Leftrightarrow c = 2$$

Como o valor máximo de  $\sin(cx)$  é 1,  $a + b \times 1 = 3 \Leftrightarrow b = 3 - a$ .

Como  $a = 1$ , tem-se  $b = 3 - 1 = 2$ .

Logo,  $f(x) = 1 + 2 \sin(2x)$ .

Quer-se calcular  $f(\alpha) = 1 + 2 \sin(2\alpha)$ .

Da fórmula fundamental da trigonometria vem que:

$$\sin^2(2\alpha) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(2\alpha) = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2(2\alpha) = \frac{16}{25}$$

Como  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ ,  $2\alpha \in ]\pi, 2\pi[$ , pelo que  $\sin(2\alpha) < 0$ , logo,  $\sin(2\alpha) = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ .

Assim,  $f(\alpha) = 1 + 2 \sin(2\alpha) = 1 + 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$ .

2. Quer-se que  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ .

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1 - x, -y, 1)$$

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (3 - x, 2 - y, -1)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(3 - x) + (-y)(2 - y) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) + (y - 0)(y - 2) - 1 = 0$$

**Opção (C)**

3.1. De todos os casos,  ${}^{11}C_4$ , tiramos o número de casos em que se forma o grupo apenas com alunos de 11.º ano,  ${}^6C_4$ , e o número de casos em que se forma o grupo apenas com alunos de 12.º ano,  ${}^5C_4$ :  ${}^{11}C_4 - {}^6C_4 - {}^5C_4$ .

**Opção (A)**

**3.2.** Para formar uma equipa de  $n$  alunos com um número ímpar de alunos do 11.º ano, podemos escolher:

- 1 aluno do 11.º ano e  $n - 1$  do 12.º ano;
- ou 3 alunos do 11.º ano e  $n - 3$  do 12.º ano;
- ou 5 alunos do 11.º ano e  $n - 5$  do 12.º ano.

Logo, o número total de equipas é:  ${}^6C_1 \times {}^5C_{n-1} + {}^6C_3 \times {}^5C_{n-3} + {}^6C_5 \times {}^5C_{n-5}$ .

Como:

- ${}^6C_1 = 6$ , é par,
- ${}^6C_3 = 20$ , é par,
- ${}^6C_5 = 6$ , é par,

todas as parcelas de  ${}^6C_1 \times {}^5C_{n-1} + {}^6C_3 \times {}^5C_{n-3} + {}^6C_5 \times {}^5C_{n-5}$  são o produto de um número par com um número natural e, por isso, um número par. Como a soma de três números pares é um número par, se o número de alunos do 11.º for um número ímpar, existe um número par de maneiras de criar o grupo de alunos.

**4.1.** Como o comprimento da diagonal de cada quadrado é metade do comprimento da diagonal do quadrado anterior, a sucessão dos comprimentos das diagonais é uma progressão geométrica de primeiro termo  $d$  e razão  $\frac{1}{2}$ .

Como  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ , a soma de todas as diagonais dos quadrados é dada por  $S = \frac{d}{1-\frac{1}{2}} = 2d$ .

Conclui-se que a soma dos comprimentos de todas as diagonais dos quadrados da sucessão é igual ao dobro do comprimento da diagonal do primeiro quadrado.

**4.2.** A diagonal do  $n$ -ésimo quadrado é  $d_n = d \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

Pelo Teorema de Pitágoras, designando por  $L$  o comprimento do lado do quadrado e  $D$  a sua diagonal,  $L^2 + L^2 = D^2 \Leftrightarrow 2L^2 = D^2 \Leftrightarrow L^2 = \frac{D^2}{2}$

Como  $L^2$  é a área do quadrado,  $A$ , vem que:  $A = \frac{D^2}{2}$

Logo, a área do  $n$ -ésimo quadrado é  $A_n = \frac{d_n^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ d \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]^2 = \frac{d^2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

Conclui-se que a sucessão  $(A_n)$  é uma progressão geométrica de primeiro termo

$A_1 = \frac{d^2}{2}$  e razão  $\frac{1}{4}$ .

5. Tem-se:

$$a_2 = a_1 + r, a_3 = a_1 + 2r$$

$$\text{Logo, } a_2 - a_3 = (a_1 + r) - (a_1 + 2r) = -r.$$

Como  $a_2 - a_3 = 4$ , vem

$$-r = 4 \Rightarrow r = -4$$

Como

$$a_8 = -8 \text{ e } a_8 = a_1 + 7r$$

tem-se

$$a_1 + 7 \times (-4) = -8 \Leftrightarrow a_1 - 28 = -8 \Leftrightarrow a_1 = 20$$

Logo,

$$a_n = 20 + (n - 1)(-4) = 24 - 4n.$$

Quer-se agora determinar  $n$  tal que  $a_n > 0$ :

$$a_n > 0 \Leftrightarrow 24 - 4n > 0 \Leftrightarrow 24 > 4n \Leftrightarrow 6 > n$$

Logo,  $n \leq 5$  e, portanto, quer-se a soma dos 5 primeiros termos de  $(a_n)$ ,  $S_5$ .

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \times 5 = \frac{20 + 4}{2} \times 5 = 60 \qquad a_5 = 24 - 4 \times 5 = 4$$

A soma dos termos positivos de  $(a_n)$  é 60.

6.1. Quer-se que  $P(k) = 0$ , ou seja,  $k^3 - 4k^2 + k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow k^3 - 3k^2 + 4 = 0$

2 é uma solução da condição  $k^3 - 3k^2 + 4 = 0$  porque  $2^3 - 3 \times 2^2 + 4 = 0$ .

2	1	-3	0	4
		2	-2	-4
	1	-1	-2	0

Assim,

$$k^3 - 3k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (k - 2)(k^2 - k - 2) = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \vee k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -1$$

Para  $P(x)$  seja divisível por  $x - k$ ,  $k = 2 \vee k = -1$

6.2.  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

	1	-4	2	4
2		2	-4	-4
	1	-2	-2	0
2		2	0	
	1	0	-2	$\neq 0$

2 tem multiplicidade 1.

**Opção (A)**

7.  $f$  é decrescente em  $]-\infty, 0[$  e em  $]0, +\infty[$

As assíntotas ao gráfico de  $g$ , como  $g(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$ , são  $x = 1$  e  $y = 2$ .

$$D_{\frac{f}{g}} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0 \wedge 2 + \frac{3}{x-1} \neq 0 \right\}$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2 + \frac{3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} = -2 \Leftrightarrow x - 1 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Pelo que

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} \right\}$$

I. - b)

II. - a)

III. - c)

8.

I.  $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 6 - 3x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ , logo 2 não pode ser um zero de  $f$  (apesar de anular o numerador).

II.  $x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$6 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x$	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x(x - 2)$	+	0	-	0	+
$6 - 3x$	+	+	+	0	-
$\frac{x(x - 2)}{6 - 3x}$	+	0	-	N.D.	-

$f$  é positiva em  $]-\infty, 0[$ .

9.  $\frac{f(5)-f(1)}{5-1} = 2 \Leftrightarrow f(5) - f(1) = 4 \times 2 \Leftrightarrow f(5) = 8 + f(1)$

**Opção (D)**

10. Como  $f(1) = 2 \times 1 + (1 - 1)^2 = 2$ ,  $A(1, 2)$ .

Sendo  $r$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A$ , o seu declive é  $f'(1)$ .

Como  $f(x) = 2x + (x - 1)^2 = 2x + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 1$ , derivando  $f$ , obtém-se  $f'(x) = 2x$ .

Assim,  $f'(1) = 2$  e, portanto, o declive da reta tangente é 2.

A reta perpendicular a  $r$  tem, então, declive  $-\frac{1}{2}$

Como essa reta passa pelo ponto  $A(1, 2)$ , a sua equação é

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Logo, a equação reduzida pedida é:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

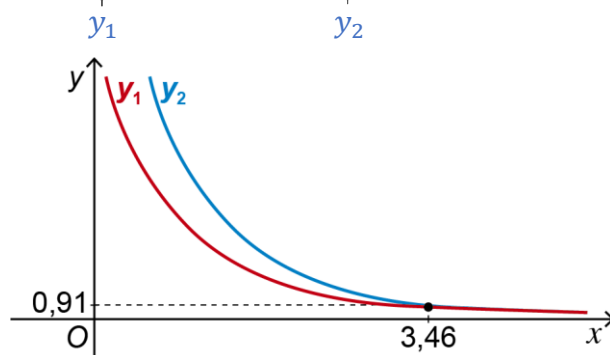
11. Sejam:

$x_0$  o instante pedido.

$f(x_0 + 1) - 20$ : a diferença entre a temperatura da peça e a temperatura ambiente uma hora depois de  $x_0$ .

$0,5(f(x_0) - 20)$ : metade da diferença entre a temperatura da peça e a temperatura ambiente no instante  $x_0$ .

$$f(x_0 + 1) - 20 = 0,5(f(x_0) - 20)$$



É ao fim de, aproximadamente, 3,5 h que, passada uma hora, a diferença entre a temperatura da peça e a temperatura ambiente é metade da diferença observada nesse instante.