Teste de avaliação n.º 5

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome:	**N.º:**	**Turma:**
Duração do teste: 90 minutos	**Tolerância:** 10 minutos	**Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Para que valores reais de k, $g(-1) - g(2) = 3 - |1 - 2k|$?

(A) -6 e 7 **(B)** -8 e -7 **(C)** -7 e 8 **(D)** -5 e 6

2. No âmbito de um plano de defesa, estão a ser efetuados exercícios militares com projéteis de um determinado tipo, tipo A.

Registaram-se os resultados e concluiu-se que a altura de um projétil do tipo A, em relação ao solo, em centenas de metros, é dada em função do tempo, t, em segundos, por:

$$a(t) = -t^2 + 8t + 9\,, t \geq 0$$

2.1. Determine, recorrendo exclusivamente a processos analíticos, a altura máxima atingida pelo projétil do tipo A e o instante em que ocorre.

2.2. Nestes exercícios de defesa são também testados projéteis de outro tipo, tipo B.

Após registo dos resultados concluiu-se que a altura de um projétil do tipo B, em relação ao solo, em centenas de metros, é dada em função do tempo, t, em segundos, por:

$$b(t) = -2t^2 + 10t + 12$$

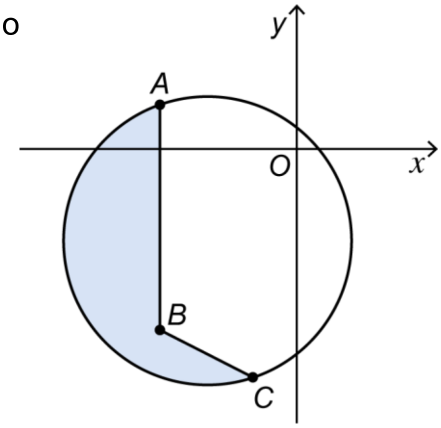
Lançaram-se dois mísseis ao mesmo tempo, um do tipo A e outro do tipo B.

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora, determine o intervalo de tempo durante o qual a altura do projétil do tipo B é superior à altura do projétil do tipo A. Na sua resposta:

- apresente uma condição que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a condição.

3. Na figura estão representados, em referencial cartesiano Oxy:

- os pontos $A(-3,1)$, $B(-3, -4)$ e $C(-1, -5)$;
- a circunferência de diâmetro $[AC]$.



3.1. Mostre que a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AC]$ é $(x+2)^2+(y+2)^2=10$.

3.2. Qual das seguintes opções representa uma condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $\left(x \leq -3 \ \wedge \ y \geq -\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}\right) \ \wedge \ (x+2)^2+(y+2)^2 \leq 10$

(B) $\left(x \leq -3 \ \wedge \ y \leq -\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}\right) \ \wedge \ (x+2)^2+(y+2)^2 \geq 10$

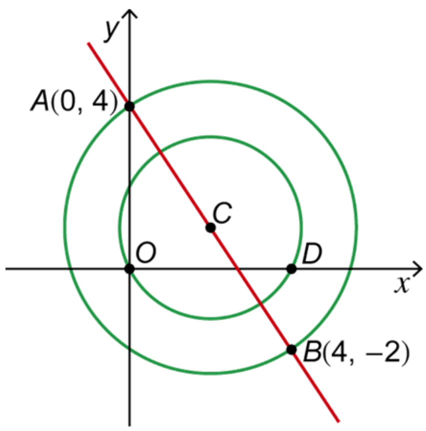
(C) $\left(x \leq -3 \ \vee \ y \leq -\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}\right) \ \wedge \ (x+2)^2+(y+2)^2 \leq 10$

(D) $\left(x \leq -3 \ \vee \ y \leq -\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}\right) \ \wedge \ (x+2)^2+(y+2)^2 = 10$

4. No referencial o. n. $Oxyz$ da figura encontram-se representadas duas circunferências concêntricas, de centro no ponto C e a reta AB.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$, é um diâmetro da circunferência de maior raio;
- a circunferência de menor raio passa na origem;
- os pontos A e B têm coordenadas $(0,4)$ e $(4,-2)$, respetivamente;
- o ponto D pertence à circunferência de menor raio e ao eixo Ox;



4.1. Mostre que os pontos C e D tem coordenadas $(2,1)$ e $(4,0)$, respetivamente

4.2. Considere as proposições seguintes:

(I) "A mediatriz do segmento de reta $[BC]$ é uma reta paralela à reta OC."

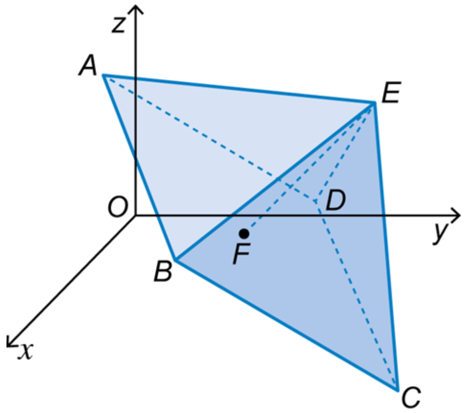
(II) "O ponto P, tal que $P = C + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA}$, pertence à circunferência de menor raio."

Justifique que as proposições **(I)** e **(II)** são ambas **falsas**.

5. Na figura ao lado, está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.

Sabe-se que:

- o ponto F é o centro do quadrado $[ABCD]$;
- $D(-6, 0, -2)$; $B(2, 2, 0)$; $\overrightarrow{FE} = (-1, 2, 2)$;
- a reta AE é definida pela condição: $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1), k \in \mathbb{R}$.
- o ponto A tem cota 2.



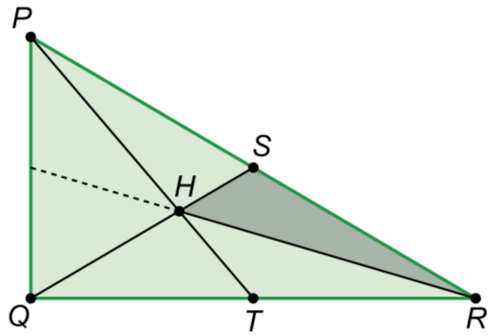
Determine as coordenadas dos pontos E e C.

6. Considere o triângulo $[PQR]$, retângulo em Q.

Sejam $[QS]$ e $[PT]$ as medianas relativas aos lados $[PR]$ e $[QR]$, H o baricentro do triângulo $[PQR]$.

Sabe-se que:

- $\overline{QS} = 7 \text{ cm}$
- $\overline{PT} = 9 \text{ cm}$
- $\overline{QR} = \frac{2\sqrt{345}}{3} \text{ cm}$



6.1. Determine o perímetro do triângulo $[QHT]$.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas e apresente todos os cálculos que efetuar.

6.2. Calcule a área, em centímetros quadrados, do triângulo $[SHR]$.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, três casas decimais.

6.3. Qual dos seguintes valores corresponde à área da circunferência dos 9 pontos?

(A) $\frac{49}{4}\pi \text{ cm}^2$ **(B)** $49\pi \text{ cm}^2$ **(C)** $\frac{49}{9}\pi \text{ cm}^2$ **(D)** $\frac{196}{9}\pi \text{ cm}^2$

7. O João gosta de andar de bicicleta e decidiu seguir um plano de treinos, com base numa publicação de um «influencer» nas redes sociais.
Em cada treino, utiliza uma aplicação que regista a distância percorrida e a energia gasta. Na tabela seguinte, apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo x a distância percorrida, em quilómetros, e y a correspondente energia gasta, em quilocalorias.

x	5	6,5	7	7,7	8	8,6	9,4
y	340	450	478	515	550	580	630

Completa o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados. Escreve, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Nos treinos cujos registos se apresentam, o João percorreu, em média, cerca de __**I**__ quilómetros por treino. Neste conjunto de treinos, a mediana das quilocalorias gastas foi __**II**__.
Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x obtido a partir dos dados apresentados na tabela, verifica-se uma correlação forte entre a distância percorrida e as quilocalorias gastas por treino. Com base nesse modelo e utilizando as estimativas dos parâmetros arredondadas às milésimas, estima-se que o João, num treino em que percorra 6 quilómetros, gaste, aproximadamente, __**III**__ quilocalorias.

I	**II**	**III**
a) 7,4	**a)** 478	**a)** 420
b) 7,5	**b)** 515	**b)** 411
c) 7,6	**c)** 550	**c)** 396

8. Numa empresa, registaram-se os tempos que os trabalhadores gastam na viagem de casa ao local de trabalho e obteve-se a tabela ao lado de frequências relativas acumuladas.

Minutos	F_i (%)
$[0\,,10[$	10
$[10\,,20[$	25
$[20\,,30[$	47
$[30\,,40[$	67
$[40\,,50[$	80
$[50\,,60[$	90
$[60\,,70[$	98
$[70\,,80]$	100

8.1. Nesta empresa, qual é a percentagem de trabalhadores que levam meia hora ou mais a chegar ao local de trabalho?

(A) 20% **(B)** 47% **(C)** 53% **(D)** 67%

8.2. Recorrendo à função cumulativa e por processos exclusivamente analíticos, determine um valor aproximado do 3.º quartil da amostra, arredondado às centésimas, e explique o seu significado no contexto do problema.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**Total**
10	16	16	16	10	16	20	16	16	16	10	12	10	16	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1. $g(-1) = -2(-1) - 1 = 2 - 1 = 1$

$g(2) = 3 \times 2^2 + 1 = 12 + 1 = 13$

$g(-1) - g(2) = 3 - |1 - 2k|$

$\Leftrightarrow 1 - 13 = 3 - |1 - 2k|$

$\Leftrightarrow -15 = -|1 - 2k|$

$\Leftrightarrow 15 = |1 - 2k|$

$\Leftrightarrow 1 - 2k = 15 \vee 1 - 2k = -15$

$\Leftrightarrow -2k = 14 \vee -2k = -16$

$\Leftrightarrow k = -7 \vee k = 8$

Opção (C)

2.

2.1. $a(t) = -t^2 + 8t + 9$

$f(t) = -t^2 + 8t$

$f(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 8t = 0 \Leftrightarrow t(-t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8$

Abcissa do vértice: $\frac{0+8}{2} = 4$

Ordenada do vértice: $a(4) = -4^2 + 8 \times 4 + 9 = 25$

Alternativa para determinar as coordenadas do vértice:

$a(t) = -t^2 + 8t + 9 =$

$= -(t^2 - 8) + 9$

$= -((t - 4)^2 - 4^2) + 9$

$= -(t - 4)^2 + 25$

Concluímos assim que o vértice tem coordenadas $(4, 25)$.

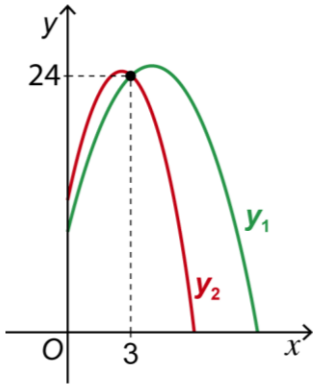
A altura máxima atingida pelo projétil do tipo A foi de 25 centenas de metros, ou seja, de 2500 metros, que ocorreu aos 4 segundos.

2.2. Pretende-se determinar o intervalo de tempo para o qual $b(t) > a(t)$.

Sejam:

$y_1 = -x^2 + 8x + 9$

$y_2 = -2x^2 + 10x + 12$



Representando graficamente os dois gráficos e determinando a sua interseção, conclui-se que a altura do projétil do tipo B é superior à altura do projétil do tipo A durante os primeiros 3 segundos de movimento, ou seja, no intervalo $[0, 3[$.

3.

3.1. $Centro = M_{[AC]} = \left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{1+(-5)}{2}\right) = (-2, -2)$

$Raio = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{d(A,C)}{2} = \frac{\sqrt{(-3-(-1))^2+(1-(-5))^2}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

Equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AC]$:

$\left(x-(-2)\right)^2 + \left(y-(-2)\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = 10$

3.2. Como $x_A = x_B$, então a reta AB é definida por $x = -3$.

Reta BC:

$m_{BC} = \frac{-5-(-4)}{-1-(-3)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$BC: y = -\frac{1}{2}x + b$

Substituindo por $B(-3\,,-4)$, vem que: $-4 = -\frac{1}{2}(-3) + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{2}$

Assim, $BC: y = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

Região: $\left(x \leq -3 \ \vee \ y \leq -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}\right) \ \wedge \ (x+2)^2 + (y+2)^2 \leq 10$

Opção (C)

4.

4.1. $C = M_{[AB]} = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = (2, 1)$

$Raio = \overline{OC} = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

Equação reduzida da circunferência de menor raio é: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

O ponto D é o ponto de interseção da circunferência de menor raio com o eixo Ox $(y = 0)$:

$(x-2)^2 + (0-1)^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x - 2 = \pm 2$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Como $x_D > 0$, então $x_D = 4$ e $D(4, 0)$.

4.2. **(I)** Para duas retas serem paralelas têm o mesmo declive.

O declive da reta OC é igual a $\frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$

Mediatriz do segmento de reta $[BC]$:

$Med_{[BC]}$: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow -8x + 16 + 4y = -4x - 2y + 1$

$\Leftrightarrow 4y + 2y = -4x + 8x + 1 - 16$

$\Leftrightarrow 6y = 4x - 15 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$

Como os declives são diferentes, as retas não são paralelas, o que justifica a falsidade da proposição (I).

(II) $\overrightarrow{CA} = A - C = (0, 4) - (2, 1) = (-2, 3)$

$\overrightarrow{BD} = D - B = (4, 0) - (4, -2) = (0, 2)$

$P = C + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} = (2, 1) + (0, 2) - (-2, 3) = (2, 0) + (2, -1) = (4, -1)$

Equação reduzida da circunferência de menor raio é: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

Verifique-se se o ponto P pertence à circunferência de menor raio:

$(4-2)^2 + (-1-1)^2 = 5 \Leftrightarrow 2^2 + (-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 4 + 4 = 5 \Leftrightarrow 8 = 5 \longrightarrow$ Falso, e assim, a proposição (II) é falsa.

5. O ponto F é o centro do quadrado $[ABCD]$, logo é o ponto médio do segmento de reta $[BD]$.

$F = M_{[BD]} = \left(\frac{-6+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (-2, 1, -1)$

$E = F + \overrightarrow{FE} = (-2, 1, -1) + (-1, 2, 2) = (-3, 3, 1)$

O ponto A tem cota igual a 2:

$(x, y, 2) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 3 - 5k \\ 2 = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 1 \\ y = 3 - 5 \times 1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$

Conclui-se assim que $A(-2, -2{,}2)$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (-2, 1, -1) - (-2, -2, 2) = (0,\ 3,\ -3)$

$C = F + \overrightarrow{FC} = F + \overrightarrow{AF} = (-2, 1, -1) + (0,\ 3,\ -3) = (-2,\ 4,\ -4)$

6.

6.1. Num triângulo, o baricentro divide as medianas na razão 1:2.

Como $\overline{QS} = 7$, então $\overline{QH} = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$

Como $\overline{PH} = 6$, então $\overline{HT} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

Como T é o ponto médio de $[QR]$, $\overline{QT} = \frac{\overline{QR}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{345}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{345}}{3}$ cm.

Assim, $P_{[QHT]} = \overline{QH} + \overline{HT} + \overline{QT} = \frac{14}{3} + 3 + \frac{\sqrt{345}}{3} \approx 13{,}9$ cm.

6.2. Como T é ponto médio do lado $[QR]$, temos que: $\overline{QT} = \frac{\frac{2\sqrt{345}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{345}}{3}$ cm.

Como H é o baricentro, então H divide a mediana $[PT]$ na razão $1:2$ e assim, temos que $\overline{PT} = \overline{PH} + \overline{HT} = 6 + 3 = 9$ cm.

O triângulo $[PQT]$ é retângulo em Q, logo:

$\overline{QT}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{PT}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{345}}{3}\right)^2 + \overline{QP}^2 = 9^2 \Leftrightarrow \overline{QP}^2 = 9^2 - \left(\frac{\sqrt{345}}{3}\right)^2$

Como $\overline{QP} > 0$, temos que $\overline{QP} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{\sqrt{345}}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm

Logo, $A_{[PQT]} = \frac{\frac{8\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{345}}{3}}{2} = \frac{4\sqrt{230}}{3}$ cm^2

$A_{[PQR]} = 2 \times A_{[PQT]} = 2 \times \frac{4\sqrt{230}}{3} = \frac{8\sqrt{230}}{3}$ cm^2

$A_{[SHR]} = \frac{1}{6} \times A_{[PQR]} = \frac{1}{6} \times \frac{8\sqrt{230}}{3}$ cm^2 $= \frac{4\sqrt{230}}{9} \approx 6{,}74$ cm^2

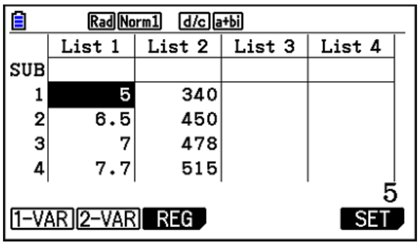
6.3. Num triângulo, o raio da circunferência dos 9 pontos é metade do raio da circunferência circunscrita. Como o triângulo $[PQR]$ é retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa, logo o raio, r, da circunferência circunscrita é igual a $r = \frac{\overline{PR}}{2} = \frac{14}{2} = 7$ cm.

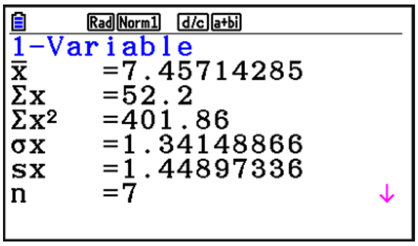
Assim, o raio, r_9, da circunferência dos 9 pontos é $r_9 = \frac{r}{2} = \frac{7}{2}$.

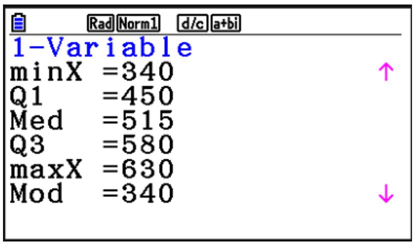
A área da circunferência dos 9 pontos é igual $A_9 = \pi\, r_9^2 = \pi \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}\pi$

Opção (A)

7. Recorrendo à calculadora gráfica, inserindo os dados em duas listas e calculando as medidas estatísticas referentes às duas listas, obtém-se:



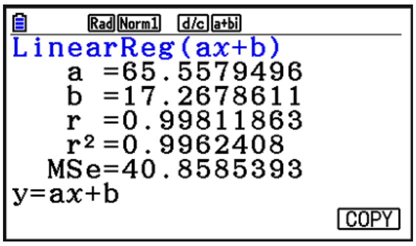




Logo, o João percorreu, em média, cerca de **7,5 km** por treino.

Temos 7 valores e a mediana será o valor central, isto é, **515**.

Usando a reta de regressão linear obtida a partir destes dados e calculando a estimativa para $x = 6$, obtém-se um valor aproximado de **411 quilocalorias**.



$y \approx 65{,}558 \times 6 + 17{,}268 \approx 411$

Conclusão:
- **I → b) 7,5**
- **II → b) 515**
- **III → c) 411**

8.

8.1. Pretende-se a percentagem de trabalhadores que demoram **30 minutos ou mais**. Da tabela: Até 30 minutos $\rightarrow 47$

Logo, $100\% - 47\% = 53\%$

Opção (C)

8.2. O valor aproximado do 3.º quartil (Q_3) corresponde ao valor para o qual 75% dos dados estão abaixo ou iguais.

1. Identificação da classe do quartil

Da tabela:

- Até 40 min $\rightarrow 67\%$
- Até 50 min $\rightarrow 80\%$

Logo, o Q_3 pertence ao intervalo $[40, 50[$.

2. Determinação analítica (proporção dentro da classe)

Amplitude da classe: 10

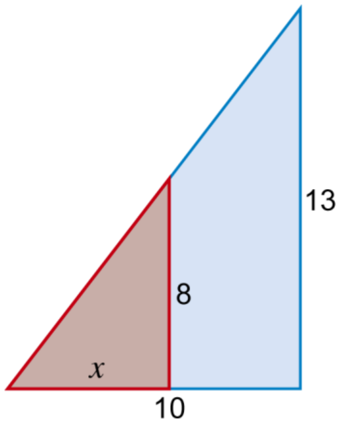
Frequência acumulada na classe: $80 - 67 = 13$

Falta para chegar a 75%: $75 - 67 = 8$

De $\frac{x}{10} = \frac{8}{13}$, vem que $x = \frac{10\times 8}{13} = \frac{80}{13}$

Valor aproximado de Q_3:

$$Q_3 = 40 + \frac{80}{13} \approx 46{,}15$$



Resposta: $Q_3 \approx 46{,}15$ minutos

Interpretação:

Cerca de 75% dos trabalhadores demoram até, aproximadamente, $46{,}15$ minutos a chegar ao local de trabalho, enquanto os restantes 25% demoram mais tempo.