Proposta de teste de avaliação

MACS

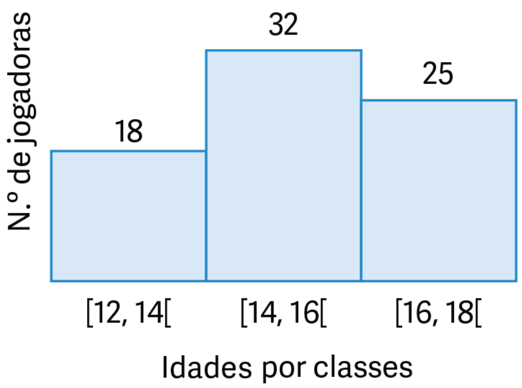
11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 100 minutos | **Data:**

1. Num torneio interescolar de andebol feminino, foram registados, para cada equipa, os golos obtidos em dez jogos. Cada equipa é composta por jogadoras de diferentes escalões etários.
Os golos obtidos por jogo, em determinado mês, foram os seguintes:

Equipa	Golos por jogo
A	22, 25, 28, 24, 27, 22, 30, 26, 24, 31
B	18, 20, 22, 21, 23, 19, 20, 21, 24, 22

No gráfico seguinte está representada por classes, a idade das jogadoras que participaram nos jogos.



Associe cada afirmação da Coluna II à classe de idade da Coluna I ou à equipa correspondente. Cada número de 1 a 8 deve ser associado apenas a uma letra.

COLUNA I
(a) [12, 14[
(b) [14, 16[
(c) [16, 18[
(d) Equipa A
(e) Equipa B

COLUNA II
(1) É a única classe cuja frequência representa uma proporção inferior a ¼ do total de jogadoras.
(2) É simultaneamente a classe modal e a classe mediana da distribuição etária.
(3) É a equipa cujo desvio-padrão dos golos é de cerca de 3,1.
(4) A média e a mediana dos golos por jogo são idênticas nesta equipa.
(5) A média dos golos por jogo desta equipa é aproximadamente 25,9 golos.
(6) É a equipa com menor dispersão relativamente à média dos golos marcados.
(7) Um terço das jogadoras pertence a esta faixa etária.
(8) Esta equipa marcou, em 25% dos jogos, um número de golos igual ou superior a 28.

2. Em 2025, num torneio regional de andebol feminino, participaram dez equipas.
Cada equipa disputou vários jogos e foi registada a média do número de golos marcados por jogo durante o torneio.
Abaixo, apresenta-se a média do número de golos por jogo de nove das equipas e o valor desconhecido a, correspondente à décima equipa.

25 a 29 26 31 27 24 30 28 27

2.1. Calcule o valor de a, sabendo que a média dos golos marcados por jogo foi de 27,2.

2.2. Admita agora que o valor de a é 32.
Determine o número de equipas cuja média de golos marcados por jogo pertence ao intervalo

$$]\,\overline{x}-s,\ \overline{x}+s\,[$$

em que:

- $\overline{x}$ representa a média amostral;
- s representa o desvio-padrão amostral das médias dos golos marcados por jogo.

Na sua resposta, apresente o valor de $\overline{x}$ e de s, arredondados às décimas.

3. Nos Jogos Olímpicos de Paris, realizou-se uma competição de atletismo, dividida em seis modalidades diferentes: corrida (C), salto em altura (SA), salto em comprimento (SC), lançamento do dardo (LD), lançamento do peso (LP) e estafetas (E).

Alguns atletas participaram em mais do que uma modalidade.
Na tabela seguinte o número 1 significa que existem atletas que participaram em ambas as modalidades.

	C	E	SC	SA	LD	LP
C	0	1	1	1	0	0
E	1	0	0	1	0	0
SC	1	0	0	1	1	0
SA	1	1	1	0	0	1
LD	0	0	1	0	0	1
LP	0	0	0	1	1	0

3.1. Represente num grafo, as modalidades e as ligações entre elas, onde cada vértice representa uma modalidade e cada aresta liga duas modalidades em que houve pelo menos um atleta que participou em ambas.

3.2. Para preparar o calendário das provas, é necessário colorir as modalidades, atribuindo a cada uma cor diferente (começando pela que tem mais atletas inscritos), de modo que duas modalidades ligadas por uma aresta não tenham a mesma cor, ou seja, não se realizem em simultâneo.

Determine o número cromático do grafo, isto é, o menor número de cores necessário para colorir todas as modalidades com esta regra e indique as modalidades que ficam com a mesma cor.

3.3. No contexto do problema o que significa esse número de cores?

4. Durante os Jogos Olímpicos de Paris, a organização quis otimizar a construção de linhas temporárias de transporte entre cinco pontos principais da cidade para facilitar o deslocamento de atletas e visitantes. Os pontos foram:
   - A — Vila Olímpica
   - B — Estádio de Atletismo
   - C — Centro Aquático
   - D — Arena de Ginástica
   - E — Estádio de Futebol

   A tabela abaixo mostra o custo estimado (em milhões de euros) para construir uma linha direta entre cada par de locais:

Par	A–B	A–C	A–D	B–C	B–D	B–E	C–D	C–E	D–E
Custo	4	2	5	1	3	7	8	6	2

   De modo a minimizar o custo da obra, construiu-se um grafo que resulta do método que a seguir se descreve.
   - Escolhe-se um dos cinco pontos e seleciona-se o menor custo entre esse ponto e os restantes. Ficam assim escolhidos dois pontos.
   - Seleciona-se o menor custo entre qualquer um dos dois pontos escolhidos e um ponto ainda não escolhido.
   - Seleciona-se o menor custo entre qualquer um dos pontos escolhidos e um dos pontos ainda não escolhido.
   - Repete-se o passo anterior até todos os pontos terem sido selecionados.

   Determine o custo mínimo total da obra.

   Na sua resposta, apresente um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito e indique a ordem das arestas escolhidas.

5. A tabela seguinte apresenta o recorde mundial masculino da prova de 100 metros velocidade em diferentes anos (adaptado). Considere $t = 0$ como o ano de 1900.

Ano	Anos após 1900 (t)	Tempo (segundos)
1912	12	10,60
1960	60	10,00
1991	91	9,86
2009*	109	9,58

*Em 2009, o recorde foi obtido por Usain Bolt e ainda não foi superado.

5.1. Utilize a calculadora para determinar uma função do tipo $R(t) = a + b\ln(t)$ que modele o tempo recorde em função dos anos após 1900.
O valor dos coeficientes a e b obtidos, arredondado às milésimas, é:

(A) $a \approx 11{,}661$ e $b \approx -978$

(B) $a \approx -0{,}001$ e $b \approx -10{,}689$

(C) $a \approx 10{,}698$ e $b \approx -0{,}999$

(D) $a \approx 11{,}661$ e $b \approx -0{,}419$

5.2. De acordo com o modelo anterior, qual seria a previsão para o tempo recorde mundial no ano de 2036?
Apresente o resultado em segundos, arredondado às centésimas.
Nota: Caso não tenha encontrado o modelo da alínea 5.1. considere $R(t) = 10{,}699 - 0{,}318\ln(t)$.

5.3. Um grupo de fisiologistas defende que o corpo humano tem um limite biológico e propõe um modelo logístico para a evolução da velocidade média v dos atletas, dado por:

$$v(t) = \frac{11{,}69}{1+0{,}97e^{-0{,}03t}}\ , t \geq 0,$$

5.3.1. Os treinadores de alta performance consideram que um atleta entra no "patamar de elite" quando a sua velocidade média atinge os 11,5 m/s.
Determine o valor de t para o qual a velocidade média atinge pela primeira vez esse patamar de elite e indique o ano civil correspondente.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:
- o(s) gráfico(s) visualizado(s) num referencial adequado;
- a abcissa do ponto relevante, arredondada às unidades.

5.3.2. Segundo este modelo, qual é o limite teórico da velocidade máxima que um ser humano pode atingir, nesta modalidade? Justifique.

6. Um atleta de elite de lançamento do peso tem duas tentativas para atingir a marca de qualificação de 21 metros. A experiência acumulada do seu treinador permite estabelecer as seguintes probabilidades:

- A probabilidade de o atleta conseguir atingir a marca no primeiro lançamento é 0,6.
- Se o atleta falhar o primeiro lançamento, a probabilidade de conseguir a marca no segundo lançamento é 0,5.
- A probabilidade de o atleta conseguir a marca em ambos os lançamentos é 0,42.

6.1. A probabilidade de atingir a marca no segundo lançamento é:

(A) 62% **(B)** 26% **(C)** 40% **(D)** 48%

6.2. Seja *X* a variável aleatória: "Número de lançamentos, entre os dois realizados, em que o atleta atingiu a marca de 21 metros após as duas tentativas".
Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável *X*.
Caso seja necessário, apresente os resultados com arredondamento às centésimas.

7. Nos últimos Jogos Olímpicos, os resultados da modalidade de salto em altura masculino seguiram uma distribuição com um valor médio $\mu = 2{,}3$ metros e um desvio-padrão $\sigma = 0{,}05$ metros.
Um grupo de investigadores de biomecânica selecionou, de forma aleatória, uma amostra de 30 saltos realizados durante as competições oficiais para analisar o impacto da fadiga nos resultados médios.

Aplicando o Teorema Limite Central, a distribuição de amostragem da média, $\bar{X}$, das amostras de igual dimensão à selecionada pelos investigadores, é caracterizada por: ___I___. A probabilidade de $\bar{X}$ pertencer ao intervalo $[2{,}29; 2{,}39]$ é, aproximadamente, ___II___. A probabilidade de $\bar{X}$ diferir do valor médio uma quantidade inferior a 2 centésimas é, aproximadamente, ___III___. Para que $P(\bar{X} \leq x) \approx 95\%$, x terá de ser, aproximadamente, ___IV___.

I	II	III	IV
a) $\bar{X} \sim N(2{,}3;\ 0{,}05)$	**a)** 86,4%	**a)** 48,6%	**a)** 2,315
b) $\bar{X} \sim N(2{,}3;\ 0{,}0017)$	**b)** 95,4%	**b)** 97,2%	**b)** 2,382
c) $\bar{X} \sim N(2{,}3;\ 0{,}0091)$	**c)** 68,3%	**c)** 95%	**c)** 2,285

8. Num clube de tiro desportivo, pretende-se estimar a eficácia dos atletas juniores na utilização de uma nova carabina de precisão. Observaram-se 200 disparos efetuados por vários atletas, dos quais 160 atingiram o centro do alvo.

8.1. Determine um intervalo de confiança a 95% para a proporção de disparos que atingem o centro do alvo com esta nova carabina e indique o que significa esse intervalo no contexto do problema. Apresente os limites do intervalo com três casas decimais.

8.2. Qual deveria ser o número de disparos a observar, se pretendêssemos que o erro máximo admissível fosse de 3% para um nível de confiança de 95%?

Cotações

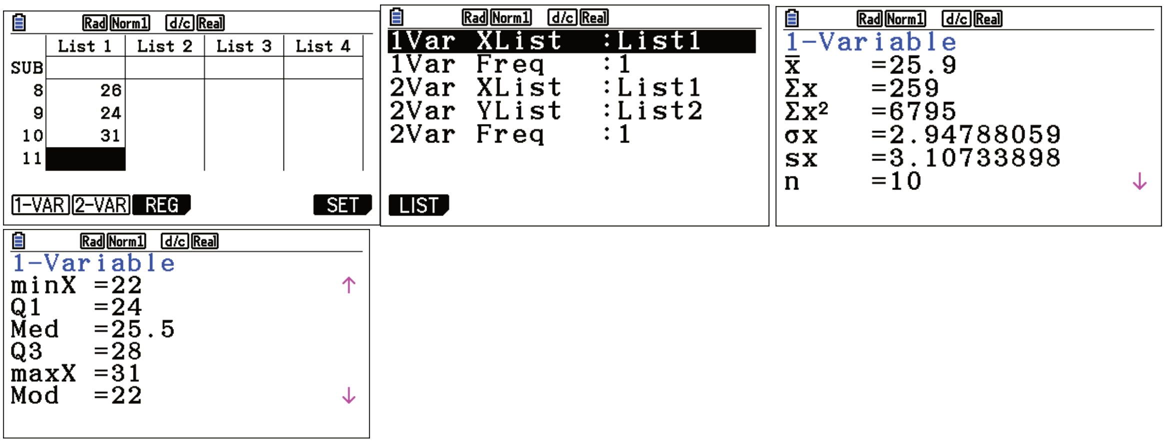
Item	1.	2.1.	2.2.	3.1	3.2	3.3.	4.	5.1.	5.2.	5.3.1.	5.3.2.	6.1.	6.2.	7.	8.1.	8.2.	Total
Cotação	14	10	10	10	14	10	14	12	12	14	12	12	14	18	12	12	200

Proposta de resolução

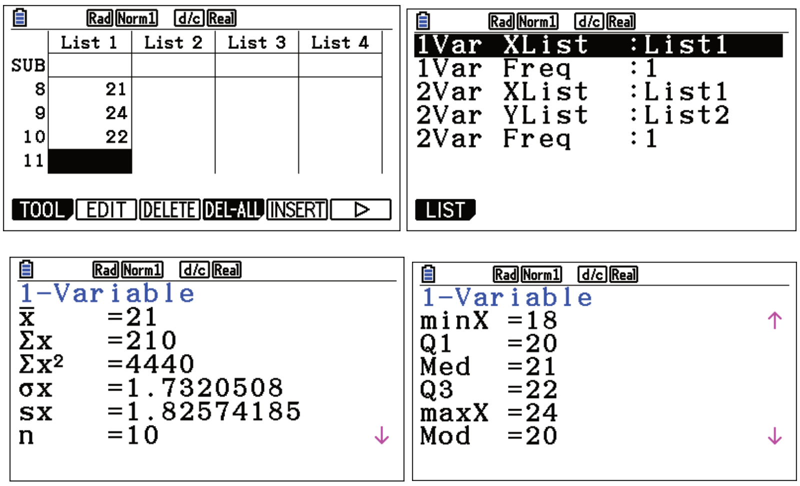
1. Recorrendo à calculadora vamos determinar, a média, os quartis e o desvio-padrão para os golos de cada equipa.

No menu estatístico, inserimos na 1.ª lista o número de golos marcados. Depois calculam-se as estatísticas de uma variável e obtém-se:

Equipa A



Equipa B



Classe	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Proporção
[12, 14[	18	18	0,240 < 0,25
[14, 16[	32	50 > 37,5	0,427
[16, 18[	25	75	0,333
Total	75	---------------	---------------

Resposta certa:

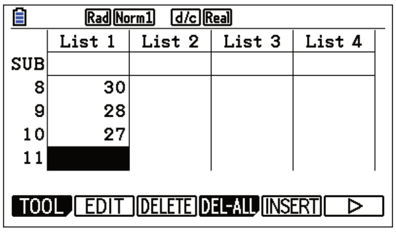
(a) (1) (b) (2) (c) (7) (d) (3) (5) (e) (4) (6) (8)

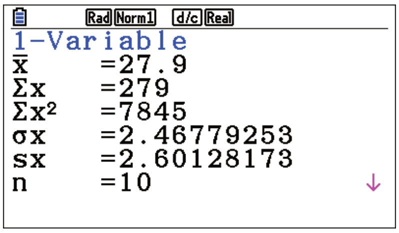
2.1. Número de equipas: 10
Média conhecida: 27,2

Substituindo na fórmula da média temos:

$$\frac{25 + a + 29 + 26 + 31 + 27 + 24 + 30 + 28 + 27}{10} = 27{,}2 \Leftrightarrow a = 27{,}2 \times 10 - 247 \Leftrightarrow a = 25$$

2.2. Cálculo da média e do desvio-padrão recorrendo à calculadora gráfica:





Logo, $\bar{x} \approx 27{,}9$ e $s \approx 2{,}6$.

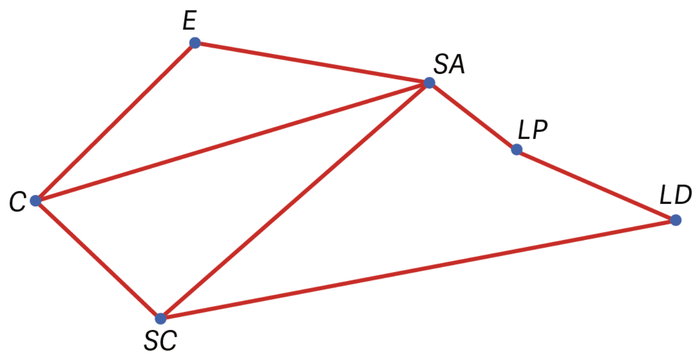
$\bar{x} - s = 27{,}9 - 2{,}6 = 25{,}3$
$\bar{x} + s = 27{,}9 + 2{,}6 = 30{,}5$

Intervalo pedido: $]25{,}3\,;\ 30{,}5[$

Valores dentro do intervalo]25,3 ; 30,5[: 29, 26, 27, 30, 28, 27

Logo, são 6 equipas cuja média de golos marcados por jogo pertencem ao intervalo $]25{,}3\,;\ 30{,}5[$.

3.1.



3.2. Começamos por escolher uma cor para o vértice com maior grau e dar a cor diferente ao vértice adjacente.
O C não pode ter a mesma cor do E e do SC.

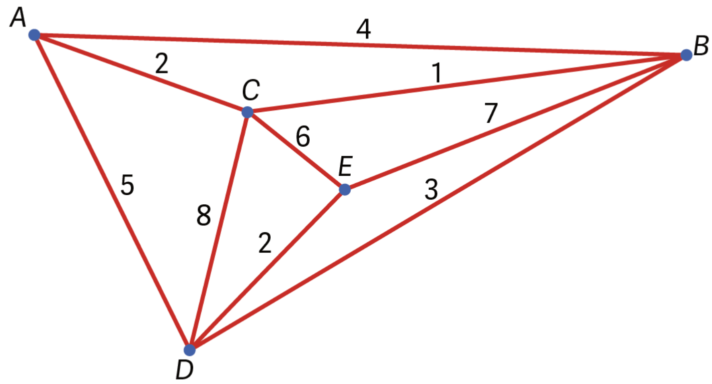
Vértice	SA	E	C	LD	LP	SC
Cor	1	2	3	1	2	2

São necessárias 3 cores diferentes.

- Cor 1: SA e LD
- Cor 2: E, LP e SC
- Cor 3: C

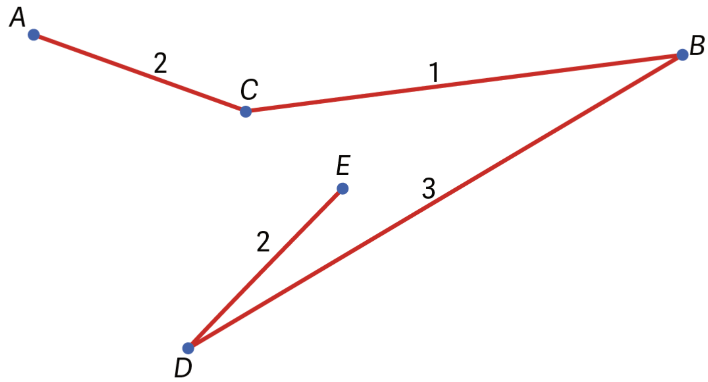
3.3. São necessárias 3 cores diferentes, o que significa que terão de ser constituídos 3 horários diferentes para a realização das 6 modalidades, as modalidades com a mesma cor podem ser realizadas em simultâneo. Cada cor tem horário diferente.

4. O grafo do problema é este:



Depois de aplicado o método obtém-se:

Sendo a primeira aresta escolhida a CB, a segunda a AC, a terceira a BD e a quarta a DE.

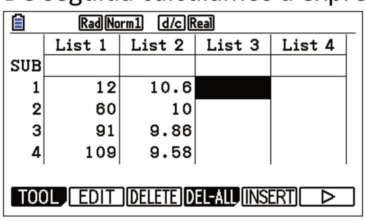


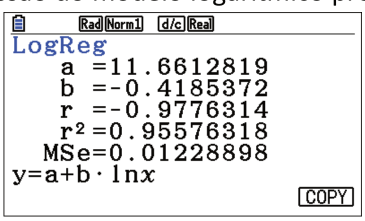
O custo mínimo total da obra foi 8 milhões de euros.

5.1. Inserimos os valores de *t* na 1.ªa lista e os valores do tempo correspondentes na 2.ª lista.

Lista 1	12	60	91	109
Lista 2	10,6	10	9,86	9,58

De seguida calculamos a expressão do modelo logarítmico pretendido.



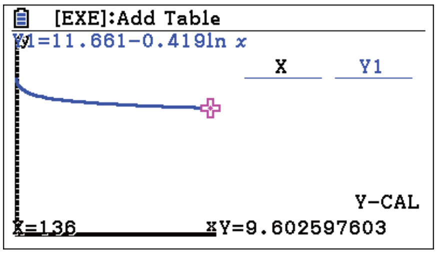


Obtém-se: $a \approx 11{,}661$ e $b \approx -0{,}419$

Resposta certa: (D)

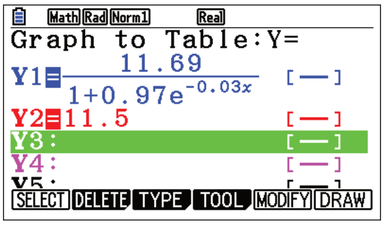
5.2. O ano de 2036 corresponde a t = 136.

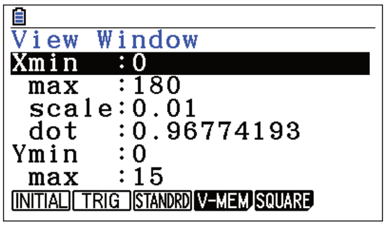
Assim, temos $R(136) = 11{,}661 - 0{,}419\ln(136) \approx 9{,}60$
Ou inserir a expressão de *R* no menu gráfico e procurar o valor de *y* quando *x* = 136.

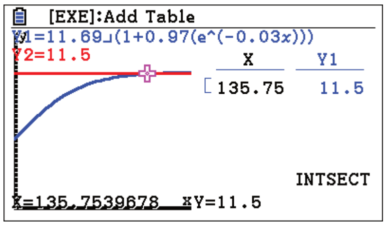


Estima-se que, em 2036, o recorde mundial seja de 9,60 segundos.

5.3.1. Inserimos as duas expressões no menu gráfico da calculadora e determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos obtidos.

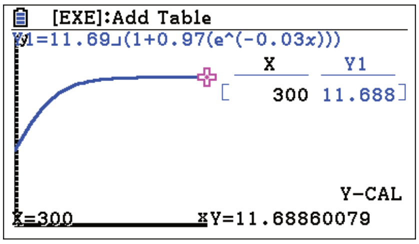






A abcissa é, aproximadamente, 136, o que corresponde ao ano civil de 2036.

5.3.2. De acordo com o modelo logístico, o limite teórico da velocidade máxima é de 11,69 m/s.
Este é o valor máximo que a função atinge à medida que o tempo vai aumentado.
Podemos observar no gráfico, que a função vai estabilizar neste valor.



6.1. Sejam os acontecimentos:

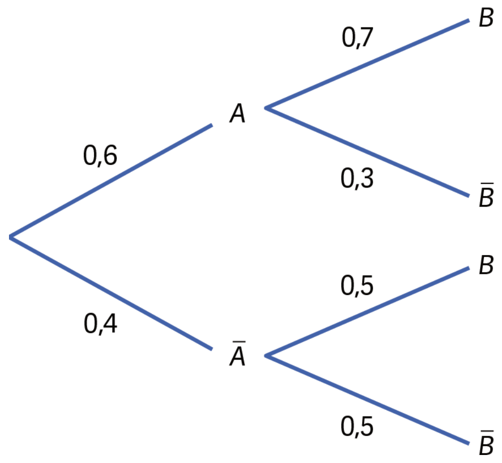
A: "Atingir a marca no 1.º lançamento."
B: "Atingir a marca no 2.º lançamento."

Sabemos que:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B|\bar{A}) = 0{,}5$
- $P(A \cap B) = 0{,}42$

Logo, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{0{,}42}{0{,}6} = 0{,}7$.

Construindo uma árvore de probabilidades temos:



Queremos determinar $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
$P(B) = 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}62$
Resposta certa: (A)

6.2. A variável *X* pode tomar os valores 0, 1 ou 2.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	0,38	0,42

$P(X = 0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$
$P(X = 1) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}38$
$P(X = 2) = P(A \cap B) = 0{,}42$

7.

I. Pelo TLC: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, pois $n \geq 30$

Substituindo na fórmula temos:

$$\bar{X} \sim N\left(2{,}3; \frac{0{,}05}{\sqrt{30}}\right) \Leftrightarrow \bar{X} \sim N(2{,}3; 0{,}0091)$$

II. Pretende-se: $P(2{,}29 \leq \bar{X} \leq 2{,}39)$

Recorrendo à distribuição na calculadora gráfica temos de inserir:

Limite inferior: 2,29

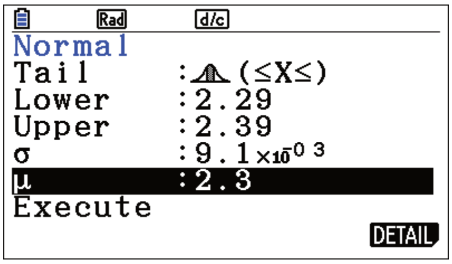
Limite superior: 2,39

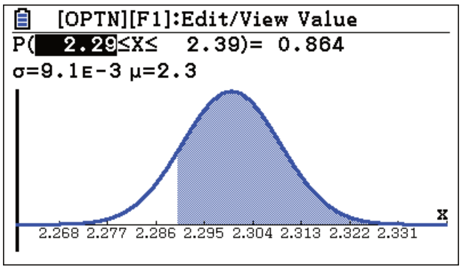
$\mu = 2{,}3$ e $\sigma \approx 0{,}0091$

Obtém-se: $P(2{,}29 \leq \bar{X} \leq 2{,}39) \approx 0{,}864$

Na calculadora gráfica:

Menu Distribuições, Normal, Tail (central)





III. Pretendemos $P(|\bar{X}-2{,}3|<0{,}02)$

$P(|\bar{X}-2{,}3|<0{,}02)=P(-0{,}02<\bar{X}-2{,}3<0{,}02)=P(-0{,}02+2{,}3<\bar{X}<0{,}02+2{,}3)=$

$=P(2{,}28<\bar{X}<2{,}32)\approx 0{,}972$

Recorrendo à distribuição na calculadora gráfica temos de inserir:

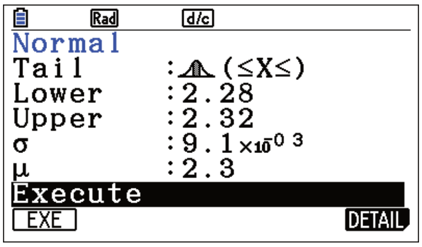
Limite inferior: 2,28

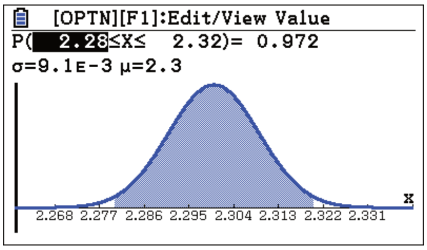
Limite superior: 2,32

$\mu=2{,}3$ e $\sigma\approx 0{,}0091$

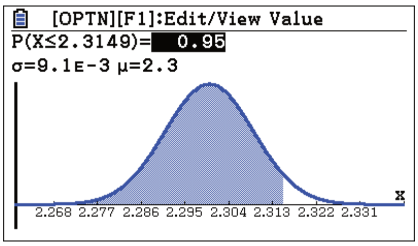
Na calculadora gráfica:

Menu Distribuições, Normal, Tail (central)





IV. Fazendo a inversa da normal na calculadora gráfica, obtém-se $x\approx 2{,}3149$



Respostas certas: {I-c; II-a; III-b; IV-a}

8.1. Dados:

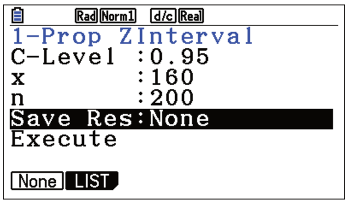
- n = 200, dimensão da amostra
- proporção amostral: $\frac{160}{200} = 0{,}8$
- nível de confiança: 95%; valor crítico: z = 1,960

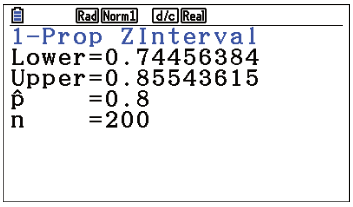
Substituindo na fórmula, temos:

$$\left[0{,}8 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}}; 0{,}8 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}}\right] =$$

$$= \left[0{,}8 - 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}16}{200}};\ 0{,}8 + 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}16}{200}}\right] \approx [0{,}745; 0{,}855]$$

Confirmando na calculadora:





Com um nível de confiança de 95 estima-se que o intervalo $[0{,}745; 0{,}855]$ contenha a proporção populacional de atletas juniores que acertam no alvo.

8.2. Como não é dada uma nova proporção, usamos a proporção dada anteriormente.

$\hat{p} = 0{,}8$

$E = 0{,}03$

Sabemos que a margem de erro é dada por $E = z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Resolvendo em ordem a n temos: $n = \left(\frac{z}{E}\right)^2 \times \hat{p} \times (1-\hat{p})$

Portanto, $n = \left(\frac{1{,}960}{0{,}03}\right)^2 \times 0{,}8 \times 0{,}2 \approx 683$

De modo que o erro máximo admissível seja de 3% para um nível de confiança de 95%, o número de disparos a observar deveria ser 683.