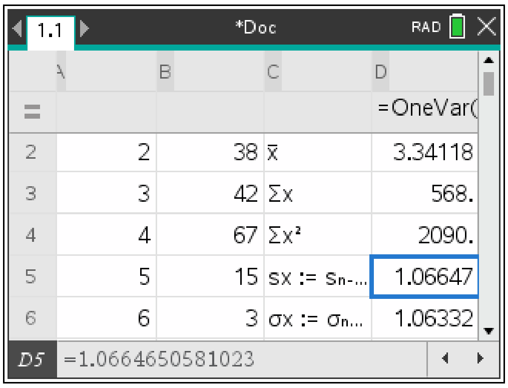
Avaliação – Itens para testes de avaliação

Matemática A | 12.º Ano

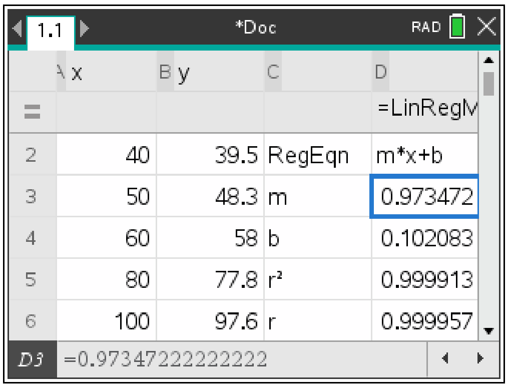
Propostas de Resolução

1. A moda é 4, dado que é o valor da amostra com maior frequência absoluta. A percentagem de caixas com menos de quatro peças defeituosas é $\frac{5+38+42}{170}\times 100 = 50\%$. Recorrendo à calculadora, podemos obter a média e o desvio-padrão amostral, permitindo, desta forma, responder à questão:



Assim, $\overline{x} \approx 3{,}34$ (valor arredondado às centésimas) e $s \approx 1{,}07$ (valor arredondado às centésimas), pelo que **I** $\rightarrow$ **c)**, **II** $\rightarrow$ **a)**, **III** $\rightarrow$ **b)** e **IV** $\rightarrow$ **b)**.

2. Vamos começar por introduzir os dados numa calculadora, considerando x a velocidade no velocímetro do veículo e y a velocidade indicada no GPS. Obtém-se:



Assim, a equação reduzida da reta de regressão linear, de y sobre x, com os parâmetros com quatro casas decimais, é $y = 0{,}9734x + 0{,}1021$.

Portanto, se o velocímetro do veículo indicar uma velocidade de 110 km/h, a velocidade indicada no GPS deverá ser, aproximadamente $y = 0{,}9734 \times 110 + 0{,}1021 \approx 107{,}2$ km/h.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

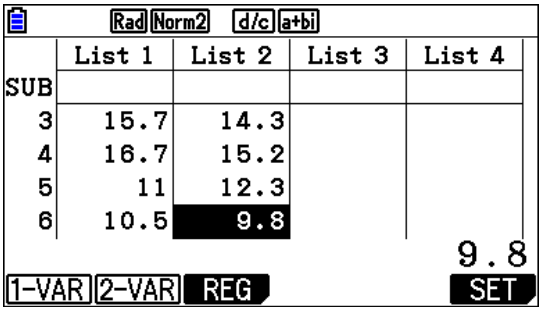
3. Ordenando as médias na disciplina de Matemática, tem-se:

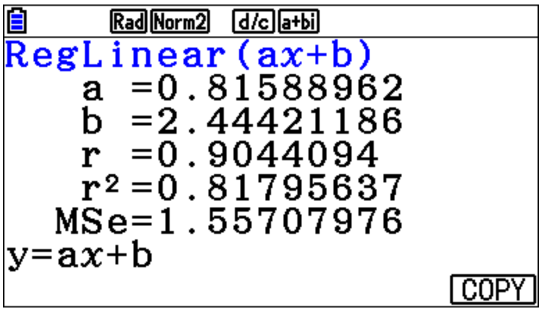
$$10,5 \qquad 11 \qquad 13 \qquad 15,7 \qquad 16,7 \qquad 17,1$$

Assim, a mediana é $\frac{13+15,7}{2}=14,35$ pelo que **I** $\rightarrow$ **b)**.

A média da variável y é igual a $\frac{17,5+14,1+14,3+15,2+12,3+9,8}{6}$, ou seja, é igual a $13,9$, com arredondamento às décimas, pelo que **II** $\rightarrow$ **a)**.

Introduzindo os dados numa calculadora:





Como $r \approx 0,9$, a correlação linear é positiva forte, e, portanto, **III** $\rightarrow$ **c)**. Admitindo como válido o modelo de regressão linear, a equação da reta de regressão linear, com os parâmetros arredondados às milésimas é $y=0,816x+2,444$. Logo, se a média de um aluno na disciplina de Matemática for $16,1$, estima-se que a média desse aluno na disciplina de Física e Química seja $y=0,816\times 16,1+2,444\approx 15,6$, pelo que **IV** $\rightarrow$ **b)**.

4.1 $u_n=-4 \Leftrightarrow \frac{2-5n}{n+7}=-4 \underset{\substack{n+7\neq 0\\ \forall n\in\mathbb{N}}}{\Leftrightarrow} 2-5n=-4(n+7) \Leftrightarrow 2-5n=-4n-28 \Leftrightarrow -5n+4n=-28-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -n=-30 \Leftrightarrow n=30$

Logo, -4 é o termo de ordem 30 da sucessão (u_n).

4.2 $u_{n+1}-u_n=\frac{2-5(n+1)}{n+1+7}-\frac{2-5n}{n+7}=\frac{-5n-3}{n+8}-\frac{2-5n}{n+7}=\frac{(-5n-3)(n+7)-(2-5n)(n+8)}{(n+8)(n+7)}=$

$=\frac{-5n^2-35n-3n-21-2n-16+5n^2+40n}{(n+8)(n+7)}=\frac{-37}{(n+8)(n+7)}$

Como $u_{n+1}-u_n=\frac{-37}{(n+8)(n+7)}<0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, a sucessão (u_n) é monótona decrescente.

4.3 Tem-se que:

- $w_2 = 8u_1 - w_1 = 8 \times \frac{2-5\times 1}{1+7} - a = \cancel{8} \times \frac{-3}{\cancel{8}} - a = -3 - a$;

- $w_3 = 8u_2 - w_2 = 8 \times \frac{2-5\times 2}{2+7} - (-3-a) = 8 \times \frac{-8}{9} + 3 + a = -\frac{64}{9} + 3 + a = -\frac{37}{9} + a$.

Logo, como $w_3 = -\frac{55}{9}$, tem-se $w_3 = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow -\frac{37}{9} + a = -\frac{55}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{55}{9} + \frac{37}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{18}{9} \Leftrightarrow a = -2$

Resposta: A

5.1 Como (u_n) é uma progressão aritmética, e sendo r a sua razão, tem-se:

$$u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16} = \frac{u_{12} + u_{16}}{2} \times 5 \underset{\substack{u_{12} = u_8 + 4r \\ u_{16} = u_{20} - 4r}}{=} \frac{u_8 + \cancel{4r} + u_{20} - \cancel{4r}}{2} \times 5 = \frac{u_8 + u_{20}}{2} \times 5 \underset{u_8 + u_{20} = 11}{=} \frac{11}{2} \times 5 = \frac{55}{2}$$

Resposta: C

5.2 Sendo r a razão da progressão aritmética (u_n), tem-se que:

- $u_8 = u_{12} - 4r = 5 - 4r$;

- $u_{20} = u_{12} + 8r = 5 + 8r$.

Assim, como $u_8 + u_{20} = 11$, vem que $u_8 + u_{20} = 11 \underset{\substack{u_8 = 5-4r \\ u_{20} = 5+8r}}{\Leftrightarrow} 5 - 4r + 5 + 8r = 11 \Leftrightarrow 4r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$.

Portanto, o termo geral de (u_n) é dado por

$$u_n = u_{12} + (n-12) \times r = 5 + (n-12) \times \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{4}n - 3 = \frac{1}{4}n + 2$$

6. Seja r a razão da progressão geométrica (w_n).

Assim, para todo o $n \in \mathbb{N}^+$, tem-se $w_{n+3} = w_n \times r^3$, pelo que:

$$w_{n+3} + w_n = 0 \Leftrightarrow w_n \times r^3 + w_n = 0 \Leftrightarrow w_n (r^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow w_n = 0 \ \vee \ r^3 + 1 = 0$$

Como $w_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, vem que $\underbrace{w_n = 0}_{\text{Impossível}} \ \vee \ r^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^3 = -1 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow r = -1$.

Logo, a soma dos 2026 primeiros termos de (w_n) é dada por:

$$w_1 \times \frac{1-r^{2026}}{1-r} = w_1 \times \frac{1-(-1)^{2026}}{1-(-1)} \underset{(-1)^{2026}=1}{=} w_1 \times \frac{1-1}{2} = w_1 \times 0 = 0$$

Resposta: B

7. A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $n^2 + \frac{3n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}^+$, ou seja:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n^2 + \frac{3n}{2} \text{, para todo o } n \in \mathbb{N}^+$$

Logo:

- $u_1 = 1^2 + \frac{3 \times 1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ (a soma, para $n = 1$, corresponde ao primeiro termo);
- $u_1 + u_2 = 2^2 + \frac{3 \times 2}{2} \underset{u_1 = \frac{5}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{5}{2} + u_2 = 4 + 3 \Leftrightarrow u_2 = 7 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow u_2 = \frac{9}{2}$.

Assim, sendo r a razão da progressão aritmética (u_n), tem-se $r = u_2 - u_1 = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Portanto, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{5}{2} + 2n - 2 = 2n + \frac{1}{2}$.

Outra resolução:

A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $n^2 + \frac{3n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n^2 + \frac{3n}{2} \text{, para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Logo, $n^2 + \frac{3n}{2} = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \left(n + \frac{3}{2}\right) \times n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{2n+3}{2} \times n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$, pelo que:

$$u_1 + u_n = 2n + 3 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r(n-1) = 2n + 3 \Leftrightarrow 2u_1 + rn - r = 2n + 3$$

Sendo $2u_1 - r$ constante, tem-se $\begin{cases} r = 2 \\ 2u_1 - r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 2u_1 - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Portanto, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{5}{2} + 2n - 2 = 2n + \frac{1}{2}$.

8.1 Seja r a razão da progressão aritmética (u_n).

Assim, $u_8 = u_2 + 6r$, pelo que $u_2 = u_8 + 12 \Leftrightarrow \cancel{u_2} = \cancel{u_2} + 6r + 12 \Leftrightarrow -6r = 12 \Leftrightarrow r = -2$.

8.2

a) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3 se $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $v_n = \frac{3^{u_n}}{27^{-n}} = \frac{3^{u_n}}{\left(3^3\right)^{-n}} = \frac{3^{u_n}}{3^{-3n}} = 3^{u_n+3n}$.

Dado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -2, então $u_{n+1} - u_n = -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{u_{n+1}+3(n+1)}}{3^{u_n+3n}} = 3^{u_{n+1}+\cancel{3n}+3-u_n-\cancel{3n}} = 3^{u_{n+1}-u_n+3} \underset{u_{n+1}-u_n=-2,\ \forall n\in\mathbb{N}}{=} 3^{-2+3} = 3$.

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

b) A soma dos dez primeiros termos de (v_n) é dada por $v_1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = v_1 \times \frac{-59048}{-2} = 29524 v_1$.

Logo, $29524 v_1 = 118096 \Leftrightarrow v_1 = \frac{118096}{29524} \Leftrightarrow v_1 = 4$.

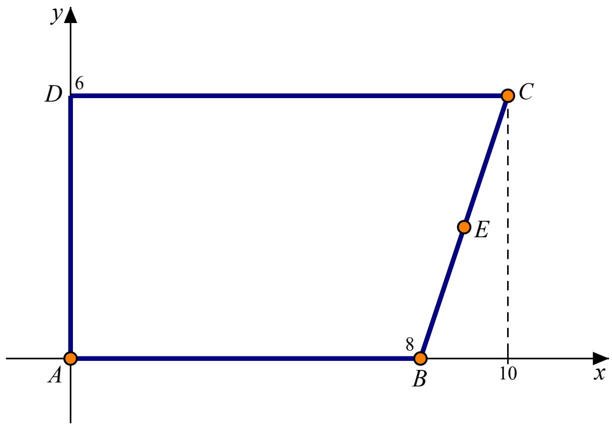
Portanto, o termo geral de (v_n) é dado por $v_n = v_1 \times 3^{n-1} = 4 \times \frac{3^n}{3} = \frac{4}{3} \times 3^n$. Como a razão da progressão geométrica (v_n) é 3 e $3 > 1$, e como $v_1 = 4 > 0$, a sucessão é crescente.

9. $\lim\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n} = \lim\left(\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^{2n} = \lim\left(\left(\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^n\right)^2 = \left(\lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}\right)^2 = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{e^2}{e^5}\right)^2 = \left(e^{-3}\right)^2 = e^{-6}$$

Resposta: A

10. Representando um trapézio num referencial o.n. xOy, em que A coincide com a origem do referencial, B pertence ao eixo Ox e D ao eixo Oy, tem-se:



Logo, $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(10,6)$, $D(0,6)$ e as coordenadas do ponto E, ponto médio de $[BC]$, são:

$$E\left(\frac{8+10}{2},\frac{0+6}{2}\right) \text{ ou seja, } E(9,3)$$

Portanto, $\overrightarrow{AE}=E-A=(9,3)-(0,0)=(9,3)$ e $\overrightarrow{BD}=D-B=(0,6)-(8,0)=(-8,6)$, pelo que:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(9,3)\cdot(-8,6)=-72+18=-54$$

Resposta: D

11. Como as retas r e s são perpendiculares, então $m_s=-\frac{1}{m_r}$, sendo m_s o declive da reta s e m_r o declive da reta r.

Tem-se $10y+5x=6 \Leftrightarrow 10y=-5x+6 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{10}x+\frac{6}{10} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}$. Logo, o declive da reta r é $-\frac{1}{2}$, pelo que o declive da reta s é $-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$. Assim, a equação reduzida da reta s é da forma $y=2x+b$.

O ponto de coordenadas $(1,4)$ pertence à reta s, pelo que, substituindo as suas coordenadas na equação da reta, obtém-se:

$$4=2\times1+b \Leftrightarrow b=2 \Rightarrow s: y=2x+2$$

Resposta: A

12.1 Como o ponto C pertence ao eixo Oz, as suas coordenadas são da forma $(0,0,z)$. Por outro lado, o ponto C também pertence ao plano ABC, pelo que, substituindo $(0,0,z)$ na equação do plano, obtém-se $2\times0+0+2z=8 \Leftrightarrow 2z=8 \Leftrightarrow z=4$. Logo, C tem coordenadas $(0,0,4)$.

Como $A = C + \overrightarrow{CA} = C - \overrightarrow{AC}$, as coordenadas do ponto A são $(0-(-4), 0-4, 4-2) = (4,-4,2)$.

Assim, se ao ponto C adicionarmos metade do vetor $\overrightarrow{CA}$, obtemos o ponto M, o centro da superfície esférica.

Logo, $M = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = C - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (0,0,4) - \frac{1}{2}(-4,4,2) = (0,0,4) + (2,-2,-1) = (2,-2,3)$.

A medida do raio é $\overline{CM} = \sqrt{(0-2)^2 + (0+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.

Portanto, uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AC]$ é:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

12.2 Um vetor normal ao plano ABC tem coordenadas $(2,1,2)$, sendo este vetor normal a qualquer plano paralelo a ABC, pelo que, uma equação cartesiana de qualquer plano paralelo a ABC é da forma:

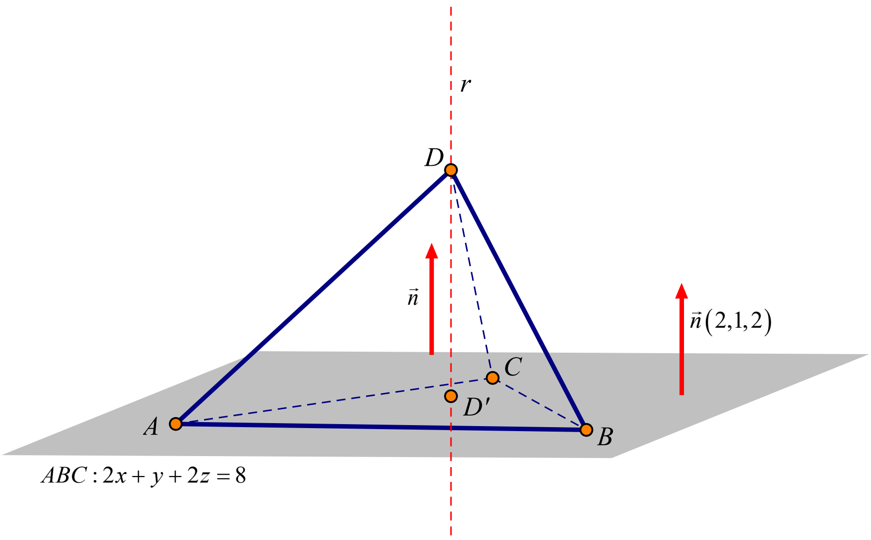
$$2x + y + 2z + d = 0$$

Como se pretende uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano ABC que contém o ponto D, de coordenadas $(-2,0,0)$, substituindo as suas coordenadas na equação do plano, obtém-se:

$$2 \times (-2) + 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow -4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$$

Logo, uma equação cartesiana do plano paralelo a ABC que contém o ponto D é $2x + y + 2z - 4 = 0$.

12.3 Consideremos a seguinte figura.



O volume da pirâmide é dado por $\frac{1}{3}A_{[ABC]}\times\overline{DD'}=\frac{1}{3}\times 12\times\overline{DD'}=4\overline{DD'}$, em que D' é a projeção ortogonal do vértice D no plano ABC.

Seja r a reta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto D. Assim, a reta r interseta o plano ABC no ponto D'.

Como a reta r é perpendicular o plano ABC, o vetor $\vec{n}(2,1,2)$, que é normal ao plano ABC, é um vetor diretor da reta r e, portanto, sendo $D(-2,0,0)$, uma equação vetorial de r é:

$$(x,y,z)=(-2,0,0)+k(2,1,2),\ k\in\mathbb{R}$$

Logo, um ponto genérico da reta r é $(-2+2k,k,2k)$, pelo que, substituindo na equação de ABC, tem--se: $2\times(-2+2k)+k+2\times 2k=8\Leftrightarrow -4+4k+k+4k=8\Leftrightarrow 9k=12\Leftrightarrow k=\frac{12}{9}\Leftrightarrow k=\frac{4}{3}$.

Portanto, as coordenadas de D' são $\left(-2+2\times\frac{4}{3},\frac{4}{3},2\times\frac{4}{3}\right)$, ou seja, $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$.

Então $\overline{DD'}=\sqrt{\left(-2-\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2+\left(0-\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{16}{9}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{144}{9}}=\sqrt{16}=4$.

$\therefore\ V_{[ABCD]}=\frac{1}{3}A_{[ABC]}\times\overline{DD'}=4\overline{DD'}=4\times 4=16$.

13.1 Uma equação do plano ABC é $x+y+z-4=0$, pelo que vetor normal ao plano ABC é $\vec{u}(1,1,1)$.

Como a pirâmide é reta e $[ABCD]$ é um losango, o vetor $\overrightarrow{ME}$, sendo M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$, também é um vetor normal a ABC.

Assim, $\overrightarrow{ME}$ e $\vec{u}$ são colineares, pelo que existe um $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $\overrightarrow{ME}=k\vec{u}=k(1,1,1)=(k,k,k)$.

A altura da pirâmide é $3\sqrt{3}$, pelo que $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=3\sqrt{3}$. Então:

$$\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{k^2+k^2+k^2}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3k^2}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\cancel{\sqrt{3}}\times\sqrt{k^2}=3\cancel{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=3^2\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{3^2}\Leftrightarrow k=-3\ \vee\ k=3$$

Como as coordenadas de M são $\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)=\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+3}{2},\frac{3-1}{2}\right)=(1,2,1)$, se:

- $k=-3$, então $\overrightarrow{ME}(-3,-3,-3)$ e $E=M+\overrightarrow{ME}$, ou seja, neste caso, as coordenadas do ponto E são $(1-3,2-3,1-3)=(-2,-1,-2)$, que não correspondem a um ponto que pertença ao primeiro octante;

- $k=3$, então $\overrightarrow{ME}(3,3,3)$ e $E=M+\overrightarrow{ME}$, ou seja, neste caso, as coordenadas do ponto E são $(1+3,2+3,1+3)=(4,5,4)$, que correspondem a um ponto que pertence ao primeiro octante.

$\therefore\ E(4,5,4)$

13.2 Como a pirâmide é reta e como $[ABCD]$ é um losango, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é normal ao plano BDE.

Tem-se $\overrightarrow{AC}=C-A$, pelo que as coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ são $(2-0,3-1,-1-4)=(2,2,-4)$ e, portanto, uma equação cartesiana do plano BDE é da forma $2x+2y-4z+d=0$.

Como o ponto E pertence ao plano BDE, substituindo as suas coordenadas na equação de BDE, tem-se $2\times4+2\times5-4\times4+d=0 \Leftrightarrow 2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

Logo, BDE: $2x+2y-4z-2=0 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} x+y-2z-1=0$.

13.3 A amplitude do ângulo AEC é igual à amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{EC}$, que é dada por $\cos\left(A\hat{E}C\right)=\cos\left(\overrightarrow{EA}\,\hat{}\,\overrightarrow{EC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left\|\overrightarrow{EA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EC}\right\|}$.

Tem-se $\overrightarrow{EA}=A-E$, ou seja, as coordenadas de $\overrightarrow{EA}$ são $(0-4,1-5,3-4)=(-4,-4,-1)$ e $\overrightarrow{EC}=C-E$, ou seja, as coordenadas de $\overrightarrow{EC}$ são $(2-4,3-5,-1-4)=(-2,-2,-5)$.

Assim, $\cos\left(A\hat{E}C\right)=\cos\left(\overrightarrow{EA}\,\hat{}\,\overrightarrow{EC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left\|\overrightarrow{EA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EC}\right\|}=$

$$=\frac{(-4,-4,-1)\cdot(-2,-2,-5)}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-1)^2}\times\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-5)^2}}=$$

$$=\frac{8+8+5}{\sqrt{16+16+1}\times\sqrt{4+4+25}}=\frac{21}{\sqrt{33}\times\sqrt{33}}=\frac{21}{33}$$

Portanto, $A\hat{E}C=\cos^{-1}\left(\dfrac{21}{33}\right)\approx 50,48^{\circ}$

14. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(3,a,-\frac{1}{2}\right)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(b,-3,12)$.

A reta r é paralela ao plano α se $\vec{r}$ e $\vec{n}$ forem perpendiculares, isto é, se $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$.

Assim, $\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \left(3,a,-\frac{1}{2}\right)\cdot(b,-3,12)=0 \Leftrightarrow 3b-3a-6=0 \Leftrightarrow 3b-3a=6 \Leftrightarrow -3(a-b)=6 \Leftrightarrow a-b=-2$.

Logo, $(a-b)^3=(-2)^3=-8$.

Resposta: B

15.1 Como o número tem de ser ímpar, o algarismo das unidades tem de ser ímpar, pelo que para esta posição temos 5 possibilidades. Como o primeiro algarismo não pode ser o 0, restam três posições para colocar os dois zeros, o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_2$. Finalmente, sobram duas posições que têm de ser ocupadas por dois algarismos distintos entre si, distintos de 0 e do algarismo que foi colocado na posição das unidades. Assim, dos restantes oito algarismos, escolhem-se, ordenadamente, dois para as duas posições que sobram. O número de maneiras de o fazer é ${}^8A_2$.

Logo, a resposta é $5\times {}^3C_2 \times {}^8A_2 = 840$.

Resposta: A

15.2 Para formarmos um número de cinco algarismos, temos de escolher cinco entre os dez algarismos disponíveis e, em seguida, distribuir os cinco algarismos pelas cinco posições. Contudo, se queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente ou decrescente, depois de os escolher, há apenas uma maneira de os distribuir para cada um dos casos (crescente ou decrescente). Por exemplo, se escolhermos os algarismos 1, 4, 6, 7 e 9, forma-se o número $14\,679$, no caso de ficarem por ordem crescente, e forma-se o número $97\,641$, no caso de ficarem por ordem decrescente.

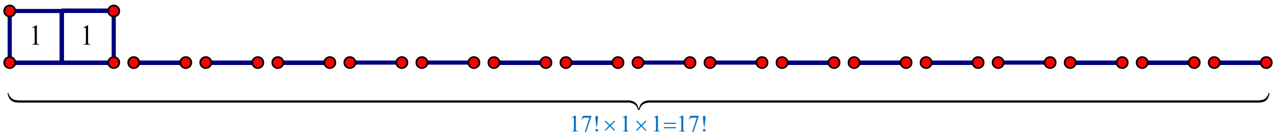
Assim:

- existem ${}^9C_5$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem crescente. O algarismo 0 não pode ser escolhido, dado que como queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente, o 0 teria de ir para a primeira posição, pelo que o número não teria cinco algarismos, mas sim quatro. Portanto, dos restantes nove algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^9C_5\times 1 = {}^9C_5$ números nestas condições;

- existem ${}^{10}C_5$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem decrescente. Dos dez algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^{10}C_5\times 1 = {}^{10}C_5$ números nestas condições.

Logo, existem ${}^9C_5 + {}^{10}C_5 = 378$ números de cinco algarismos em que os seus algarismos estão dispostos por ordem crescente ou por ordem decrescente.

16.1 Agrupando os dois vasos num bloco, este bloco e as restantes dezasseis peças perfazem dezassete peças a permutar. Dado que os vasos são iguais, permutando os dois dentro do bloco não gera uma nova disposição, pelo que a resposta ao problema é $17!$.



16.2 Existem dezassete peças distintas (os dois vasos são iguais, pelo que consideramos apenas um para formar um conjunto de seis peças distintas). Assim, das dezassete peças escolhem-se seis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{17}C_6$.

Portanto, existem ${}^{17}C_6 = 12\ 376$ maneiras distintas de escolher seis peças distintas para a exposição.

16.3 Começamos por escolher a fila horizontal onde se vão colocar os dois vasos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_1 = 4$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}C_2$ maneiras distintas de escolher dois compartimentos, entre os seis da fila horizontal escolhida, para os dois vasos. Finalmente, como na fila onde ficam os vasos não podem estar outras peças, dos restantes dezoito compartimentos escolhem-se, ordenadamente, dezasseis para colocar as restantes peças. O número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A_{16}$.

Logo, uma expressão que permite determinar o número de disposições possíveis é $4 \times {}^{6}C_2 \times {}^{18}A_{16}$.

17. Sejam n o número de cartas vermelhas em cima da mesa e p o número de cartas pretas em cima da mesa (n e p naturais).

Tem-se:

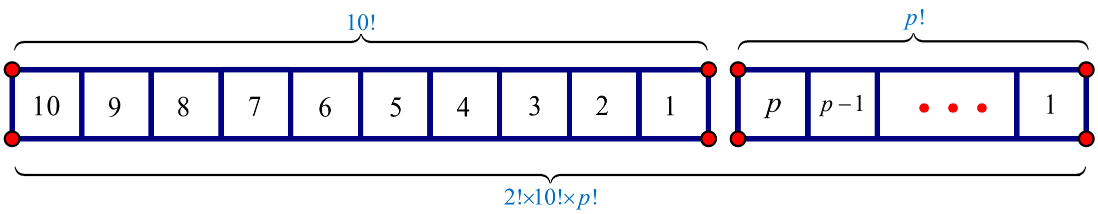
- o número de maneiras de formar um conjunto de duas cartas vermelhas entre as n é dado por ${}^{n}C_2$.

Logo, ${}^{n}C_2 = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times1\times(-90)}}{2\times1} \Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{361}}{2} \Leftrightarrow n = -9 \ \vee \ n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 10$, pelo que foram colocadas em cima da mesa dez cartas vermelhas.

- agrupando num bloco as dez cartas vermelhas e agrupando num outro bloco as p cartas pretas, vem:

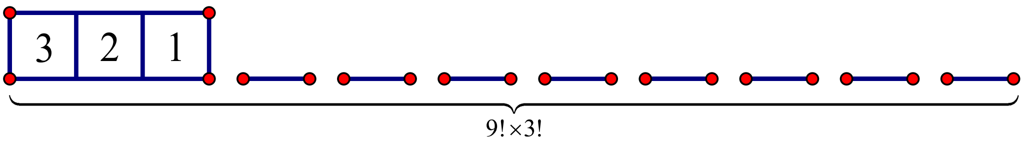


Os dois blocos permutam entre si de $2!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, as dez cartas vermelhas permutam entre si de $10!$ maneiras distintas e as p cartas pretas permutam entre si de $p!$ maneiras distintas. Portanto, o número de maneiras de colocar as cartas em fila de modo que as cartas da mesma cor fiquem em posições consecutivas é dado por $2! \times 10! \times p!$.

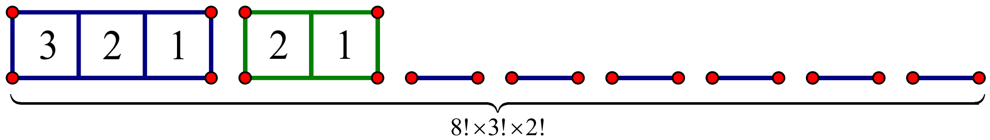
Logo, $2! \times 10! \times p! = 174\,182\,400 \Leftrightarrow p! = \dfrac{174\,182\,400}{2! \times 10!} \Leftrightarrow p! = 24 \Leftrightarrow p = 4$

$\therefore$ Em cima da mesa foram colocadas catorze cartas, dez vermelhas e quatro pretas.

18. Vamos começar por contar todos os casos em que os onze amigos se colocam numa só fila, com a Inês, a Sofia e a Maria em posições consecutivas. Para tal, agrupamos as três num bloco. Esse bloco e os restantes oito amigos permutam entre si de $9!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três permutam entre si de $3!$ maneiras distintas:

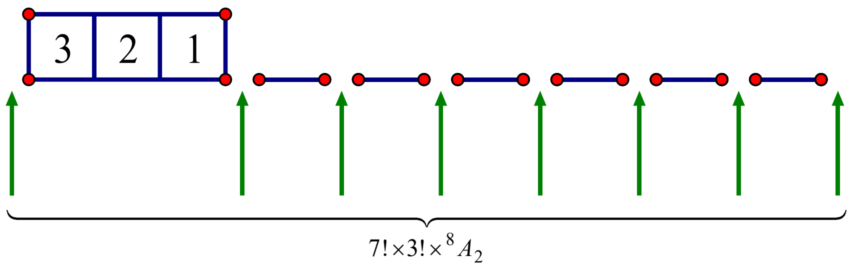


Em seguida, retiramos todos os casos em que os onze amigos se colocam numa só fila, com a Inês, a Sofia e a Maria em posições consecutivas, assim como o Pedro o João em posições consecutivas. Para tal, agrupamos a Inês, a Sofia e a Maria num bloco e também agrupamos o Pedro e o João num outro bloco. Esses dois blocos e os restantes seis amigos permutam entre si de $8!$ maneiras distintas. Dentro do bloco das raparigas, as três permutam entre si de $3!$ maneiras distintas e dentro do bloco dos rapazes, os dois permutam entre si de $2!$ maneiras distintas:



Logo, a resposta a este problema é $9! \times 3! - 8! \times 3! \times 2! = 1\,693\,440$.

Outra resolução: Comecemos por agrupar num bloco a Inês, a Sofia e a Maria. Como o Pedro e o João não podem ficar juntos, então têm de ocupar duas das oito posições entre os restantes seis amigos e o bloco, ou nas pontas. Essas posições que podem ser ocupadas pelo Pedro e pelo João estão assinaladas com as setas verdes na figura seguinte:



Assim, o bloco e os restantes seis amigos permutam entre si de $7!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três raparigas permutam entre si de $3!$ maneiras distintas. Finalmente, das oito posições que o Pedro e o João podem ocupar, escolhem-se, ordenadamente, duas. O número de maneiras de o fazer é ${}^8A_2$.

Portanto, a resposta ao problema é $7! \times 3! \times {}^8A_2 = 1\,693\,440$.

Resposta: A

19. Tem-se:

$$\underbrace{{}^nC_6 + {}^nC_7}_{{}^{n+1}C_7} + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_{20} \Leftrightarrow \underbrace{{}^{n+1}C_7 + {}^{n+1}C_8}_{{}^{n+2}C_8} = {}^{n+2}C_{20} \Leftrightarrow {}^{n+2}C_8 = {}^{n+2}C_{20} \underset{{}^nC_p = {}^nC_{n-p}}{\Leftrightarrow} n+2-8=20 \Leftrightarrow n=26$$

Logo, a linha n é a linha 26, pelo que a linha $n+1$ é a linha 27 e, portanto, a soma de todos os elementos da linha $n+1$ é $2^{27} = 134\,217\,728$.

20. Se a, b e c são os três elementos centrais de uma linha n do triângulo de Pascal, tal que $a<b$ e $b>c$, então $c=a$ e b é o maior elemento da linha (elemento central).

Consideremos a seguinte figura:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{Linha} \\
n & 1 & \cdots & a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \arrow[dr] & & c \arrow[dl] & \cdots & 1 \\
n+1 & 1 & \cdots & & a+b \arrow[dr] & & b+c \arrow[dl] & & \cdots & 1 \\
n+2 & 1 & \cdots & & & a+2b+c & & & \cdots & 1
\end{tikzcd}$$

Logo, o elemento central da linha $n+2$ é $a+2b+c \underset{c=a}{=} a+2b+a = 2a+2b$.

Resposta: B

21. A forma geral dos termos do desenvolvimento do binómio $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{x^2}\right)^{19}$ é ${}^{19}C_p \times \left(\sqrt{x}\right)^{19-p} \times \left(-\frac{a}{x^2}\right)^p$, com p inteiro e $0 \le p \le 19$.

Assim, ${}^{19}C_p \times \left(\sqrt{x}\right)^{19-p} \times \left(-\frac{a}{x^2}\right)^p = {}^{19}C_p \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{19-p} \times (-a)^p \times \frac{1}{\left(x^2\right)^p} = {}^{19}C_p \times (-a)^p \times \frac{x^{\frac{19-p}{2}}}{x^{2p}} =$

$$= {}^{19}C_p \times (-a)^p \times x^{\frac{19-p}{2}-2p} = {}^{19}C_p \times (-a)^p \times x^{\frac{19-5p}{2}}$$

O termo de segundo grau é o termo com parte literal igual a x^2. Assim, fazendo $\frac{19-5p}{2}=2$, vem $19-5p=4 \Leftrightarrow -5p=-15 \Leftrightarrow p=3$, pelo que o coeficiente do termo de segundo grau é ${}^{19}C_3 \times (-a)^3$.

Portanto, ${}^{19}C_3 \times (-a)^3 = 7752 \Leftrightarrow -969a^3 = 7752 \Leftrightarrow a^3 = \frac{7752}{-969} \Leftrightarrow a^3 = -8 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow a = -2$.

Resposta: B

22. Um conjunto de peças de fruta pode ter:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 maçãs. Portanto, para a quantidade de maçãs existente num dado conjunto, temos onze possibilidades;
- 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 laranjas. Portanto, para a quantidade de laranjas existente num dado conjunto, temos sete possibilidades;
- 0, 1, 2, 3 ou 4 bananas. Portanto, para a quantidade de bananas existente num dado conjunto, temos cinco possibilidades.

Logo, como o conjunto a escolher tem de ter pelo menos um elemento, pelo princípio fundamental da contagem, o número de casos possíveis é $11 \times 7 \times 5 - 1 = 384$ (retiramos 1, que corresponde ao conjunto vazio, isto é, ao caso de não se escolherem peças de fruta de qualquer um dos três tipos).

O número de casos favoráveis é $1 \times 7 \times 3 = 21$ (para as maçãs, só há uma possibilidade, escolher 5 unidades, para as laranjas há sete possibilidades, escolher 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 unidades, e para as bananas há três possibilidades, escolher 2, 3 ou 4 unidades).

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{21}{384} = \frac{7}{128}$.

23. Os acontecimentos A e B são independentes, pelo que $P(A|B) = P(A)$ e portanto, como $P(A|B) = 0{,}7$, tem-se que $P(A) = 0{,}7$.

Logo:

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + \underbrace{P(B)}_{0{,}2} - \underbrace{P(\overline{A} \cap B)}_{P(B)-P(A\cap B)} = 1 - \underbrace{P(A)}_{0{,}7} + 0{,}2 - \left(P(B) - P(A \cap B)\right) =$$

$$\underset{\substack{A \text{ e } B \text{ são} \\ \text{independentes, logo} \\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}}{=} 1 - 0{,}7 + 0{,}2 - \left(P(B) - P(A) \times P(B)\right) = 0{,}5 - (0{,}2 - 0{,}7 \times 0{,}2) = 0{,}44$$

Resposta: C

24.1 O número de casos possíveis é ${}^{12}C_4$, que é o número de maneiras de escolher quatro das doze pessoas.

Para o número de casos favoráveis, temos de considerar dois casos disjuntos:

- um homem e três mulheres: ${}^3C_1 \times {}^9C_3$ (dos três homens escolhe-se um, ${}^3C_1$, e das nove mulheres escolhem-se três, ${}^9C_3$);

- dois homens e duas mulheres: ${}^3C_2 \times {}^9C_2$ (dos três homens escolhem-se dois, ${}^3C_2$, e das nove mulheres escolhem-se duas, ${}^9C_2$).

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^3C_1 \times {}^9C_3 + {}^3C_2 \times {}^9C_2$ e a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^3C_1 \times {}^9C_3 + {}^3C_2 \times {}^9C_2}{{}^{12}C_4} = \frac{8}{11}$$

24.2 Vamos começar por escolher os membros que irão desempenhar os cargos. Para tal, vamos considerar dois casos disjuntos:

- irão desempenhar os cargos um homem e duas mulheres: ${}^3C_1 \times {}^9C_2 \times 3!$ (dos três homens escolhe-se um, ${}^3C_1$, e das nove mulheres escolhem-se duas, ${}^9C_2$. Finalmente, permutam-se os três membros escolhidos pelos três cargos, o número de maneiras de o fazer é $3!$);

- irão desempenhar os cargos dois homens e uma mulher: ${}^3C_2 \times {}^9C_1 \times 3!$ (dos três homens escolhem-se dois, ${}^3C_2$, e das nove mulheres escolhe-se uma, ${}^9C_1$. Finalmente, permutam-se os três membros escolhidos pelos três cargos, o número de maneiras de o fazer é $3!$).

Assim, para desempenhar os cargos, temos ${}^3C_1 \times {}^9C_2 \times 3! + {}^3C_2 \times {}^9C_1 \times 3!$ possibilidades distintas. Para cada uma destas maneiras, falta contabilizar o número de maneiras de escolher os restantes membros da comissão. Portanto, dos restantes nove membros, escolhem-se quatro. Como os quatro irão desempenhar tarefas indiferenciadas, o número de maneiras de os escolher é ${}^9C_4$.

Logo, a resposta a este problema é $\left({}^3C_1 \times {}^9C_2 \times 3! + {}^3C_2 \times {}^9C_1 \times 3!\right) \times {}^9C_4 = 102\,060$.

25. O número de casos possíveis é ${}^{11}C_3$, que é o número de maneiras de escolher três dos onze pontos assinalados.

Para que os três pontos escolhidos definam um plano paralelo ao plano xOy, temos dois casos disjuntos:

- escolhem-se três pontos da face $[ABCD]$, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$;

- escolhem-se três pontos da face $[EFGH]$, o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_3$. No entanto, entre estas escolhas, há três que não definem um plano, por serem escolhas com três pontos não colineares, são elas: E, R e H; E, Q e G; H, Q e F. Logo, para este caso temos ${}^6C_3 - 3$ possibilidades.

Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^4C_3 + {}^6C_3 - 3$ e a probabilidade pedida é $\frac{{}^4C_3 + {}^6C_3 - 3}{{}^{11}C_3} = \frac{7}{55}$.

26. Sendo n o número de amigos de Viana do Castelo tem-se que o número de casos possíveis é $(n+3)!$, que é o número de maneiras dos $n+3$ permutarem nas $n+3$ posições de descida.

Para o número de casos favoráveis começamos por agrupar os três amigos de Aveiro num bloco. Esse bloco e os n amigos de Viana do Castelo (que contam como $n+1$ «pessoas», dado que o bloco conta como uma pessoa) permutam entre si de $(n+1)!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras os três amigos de Aveiro permutam entre si, no bloco, de $3!$ maneiras distintas.

Logo, o número de casos favoráveis é $(n+1)! \times 3!$, pelo que a probabilidade, em função de n, dos três amigos de Aveiro descerem consecutivamente é dada por $\frac{(n+1)! \times 3!}{(n+3)!}$.

Portanto, $\frac{(n+1)! \times 3!}{(n+3)!} = \frac{1}{51} \Leftrightarrow \frac{\cancel{(n+1)!} \times 6}{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \frac{1}{51} \Leftrightarrow 6 \times 51 = n^2 + 5n + 6 \Leftrightarrow n^2 + 5n - 300 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-300)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -20 \quad \vee \quad n = 15$$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = 15$, pelo que o grupo é constituído por $15 + 3 = 18$ pessoas.

27. Consideremos os acontecimentos:

- A: «O funcionário escolhido é do sexo masculino.»

- B: «O funcionário escolhido é licenciado.»

Pelo enunciado, tem-se que $P(A) = 40\%$, ou seja, $P(A) = 0{,}4$.

Como $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados, tem-se que $P(B|A) = \frac{1}{8}$.

Logo, $P(B|A) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \underset{P(A)=0,4}{\Leftrightarrow} P(B \cap A) = \frac{1}{8} \times 0{,}4 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}05$.

Como entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são do sexo feminino, tem-se que $P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{3}{4}$.

Logo, $P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{3}{4}P(B)$.

Pretende-se determinar $P\left(A\cup\overline{B}\right)$.

Tem-se que $P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-\underbrace{P\left(A\cap\overline{B}\right)}_{P(A)-P(A\cap B)}=P(A)+1-P(B)-\left(P(A)-P(A\cap B)\right)=$

$$=\cancel{P(A)}+1-P(B)-\cancel{P(A)}+P(A\cap B)=1-P(B)+P(A\cap B)$$

Assim, como já sabemos o valor de $P(A\cap B)$, falta-nos determinar o valor de $P(B)$.

Mas $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{3}{4}P(B)$, pelo que:

$$\underbrace{P\left(\overline{A}\cap B\right)}_{=P(B)-P(A\cap B)}=\frac{3}{4}P(B) \Leftrightarrow P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{=0,05}=\frac{3}{4}P(B) \Leftrightarrow P(B)-\frac{3}{4}P(B)=0,05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}P(B)=0,05 \Leftrightarrow P(B)=0,05\times 4 \Leftrightarrow P(B)=0,2$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)=1-P(B)+P(A\cap B)=1-0,2+0,05=0,85 \text{, ou seja, } P\left(A\cup\overline{B}\right)=85\%$$

Outra resolução (usando uma tabela):

Com a informação dada pelo enunciado podemos construir a seguinte tabela:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$0,05$	$\frac{3}{4}P(B)$	$P(B)$
$\overline{B}$			
Total	$0,4$		1

Logo, $0,05+\frac{3}{4}P(B)=P(B) \Leftrightarrow 0,05=P(B)-\frac{3}{4}P(B) \Leftrightarrow 0,05=\frac{1}{4}P(B) \Leftrightarrow P(B)=0,05\times 4 \Leftrightarrow P(B)=0,2$

Preenchendo o resto da tabela:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$0,05$	$\frac{3}{4}\times 0,2=0,15$	$0,2$
$\overline{B}$	$0,4-0,05=0,35$	$0,6-0,15=0,45$	$1-0,2=0,8$
Total	$0,4$	$1-0,4=0,6$	1

Portanto, $P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=0,4+0,8-0,35=0,85$, ou seja, $P\left(A\cup\overline{B}\right)=85\%$.

28. O número de casos possíveis é ${}^{15}A_7\times{}^{8}C_5$. Das quinze posições, escolhem-se, ordenadamente, sete para as sete bolas distintas, o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}A_7$, e, para cada uma dessas maneiras, existem ${}^{8}C_5$ maneiras distintas de escolher cinco posições, entre as restantes oito, para as cinco bolas de ténis, que são indistinguíveis.

As bolas de futebol podem ser colocadas de 12 maneiras distintas, ocupando as posições 1 a 4, ou 2 a 5, ou 3 a 6, ou 4 a 7, ou 5 a 8, ou 6 a 9, ou 7 a 10, ou 8 a 11, ou 9 a 12, ou 10 a 13, ou 11 a 14, ou 12 a 15. Para cada uma destas maneiras, as bolas de futebol permutam entre si de $4!$ maneiras distintas. Das onze posições restantes, escolhem-se cinco para as cinco bolas de ténis, que são indistinguíveis, o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}C_5$. Finalmente, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}A_3$ formas distintas de escolher, ordenadamente, três posições entre as restantes seis para as três bolas de basquetebol. Logo, o número de casos favoráveis é $12\times 4!\times{}^{11}C_5\times{}^{6}A_3$.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis, pelo que a probabilidade pedida é dada por $\dfrac{12\times 4!\times{}^{11}C_5\times{}^{6}A_3}{{}^{15}A_7\times{}^{8}C_5}$.

29. $P\left(Y|X\right)$ é a probabilidade de todas as bolas numeradas com um número ímpar serem extraídas, sabendo que a bola com o número 4 é extraída exatamente quatro vezes.

Sabemos que a bola com o número 4 saiu em exatamente quatro das extrações. Assim, para cada umas das restantes cinco extrações há oito possibilidades (qualquer um dos restantes oito algarismos), pelo que o número de casos possíveis é 8^5.

Como queremos que sejam extraídas todas as bolas numeradas com um número ímpar, nas restantes cinco extrações onde não saiu o número 4 têm de sair as bolas com os cinco algarismos ímpares, pelo que o número de casos favoráveis é $5!$, que é o número de maneiras de os cinco algarismos ímpares permutarem nas cinco posições correspondentes às cinco extrações onde não saiu o número 4.

Logo, pela regra de Laplace, tem-se que $P\left(Y|X\right)=\dfrac{5!}{8^5}\approx 0,0037$.

30. O número de casos possíveis é ${}^8C_4$, que é o número de maneiras de escolher quatro amigos entre os oito. Para o número de casos favoráveis, ao total de possibilidades de escolher quatro amigos, retiram--se todos os grupos de quatro em que os dois membros do casal não estejam presentes. Para isso, escolhem-se dois amigos entre os restantes seis (excluindo o casal), sendo o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_2$. Assim, o número de casos favoráveis é ${}^8C_4 - {}^6C_2$.

A probabilidade pedida é $\dfrac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$.

Resposta: C

31.1 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+1}{e^{2x}\times e^{-kx}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}\right)}{e^x\times e^x\times e^{-kx}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{e^{x-kx}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Limite notável}}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{e^{x(1-k)}} \underset{k<1\Rightarrow 1-k>0}{=} \frac{1}{+\infty}\times\frac{1-\frac{4}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}{e^{+\infty}}$$

$$= 0\times\frac{1-0+0}{+\infty} = 0\times\frac{1}{+\infty} = 0\times 0 = 0$$

Outra resolução, com a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+1}{e^{2x-kx}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-4x+1\right)'}{\left(e^{2x-kx}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{(2-k)e^{2x-kx}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-4)'}{\left((2-k)e^{2x-kx}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(2-k)^2e^{2x-kx}} \underset{k<1\Rightarrow 2-k>0}{=} \frac{2}{(2-k)^2e^{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

31.2 A função g é contínua em $x=-1$ se $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = g(-1)$.

- $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)\right) = e^{-k}\left((-1)^2-4\times(-1)+1\right) = e^{-k}(1+4+1) = 6e^{-k}$

- $g(-1) = e^{-k}\left((-1)^2-4\times(-1)+1\right) = e^{-k}(1+4+1) = 6e^{-k}$

- $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x-2}{e^{\frac{x+1}{2}}-1} \underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x+1)(x-2)}{e^{\frac{x+1}{2}}-1} = \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x+1}{e^{\frac{x+1}{2}}-1}\times\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2) =$

$$\underset{\substack{y=\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow x+1=2y \\ x\to -1^- \Rightarrow y\to 0^-}}{=} \lim_{y\to 0^-} \frac{2y}{e^y-1}\times(-1-2)=2\lim_{y\to 0^-}\frac{y}{e^y-1}\times(-3)=2\times\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}\times(-3)=2\times\frac{1}{1}\times(-3)=-6$$

Assim, $6e^{-k}=-6 \Leftrightarrow e^{-k}=-1$, que é uma equação impossível em $\mathbb{R}$, pelo que não existe k de modo que a função g seja contínua em $x=-1$.

i) $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$. Logo, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

Usando a regra de L'Hôpital para calcular $\lim_{x\to -1^-} g(x)$:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-x-2}{e^{\frac{x+1}{2}}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{\left(e^{\frac{x+1}{2}}-1\right)'}=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x-1}{\frac{1}{2}\times e^{\frac{x+1}{2}}}=\frac{2\times(-1)-1}{\frac{1}{2}\times e^{\frac{-1+1}{2}}}=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$$

1.3 Para $k=-1$ e $x\in\left]-1,+\infty\right[$, tem-se $g(x)=e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)$.

Tem-se:

- $g'(x)=\left(e^{-x}\right)'\left(x^2-4x+1\right)+e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)'=-e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)+e^{-x}(2x-4)=$

  $=e^{-x}\left(-x^2+4x-1\right)+e^{-x}(2x-4)=e^{-x}\left(-x^2+4x-1+2x-4\right)=e^{-x}\left(-x^2+6x-5\right)$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(-x^2+6x-5\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Impossível em }\mathbb{R}} \vee -x^2+6x-5=0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-5)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=\dfrac{-6-4}{-2} \vee x=\dfrac{-6+4}{-2} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=5 \vee x=1$

Fazendo um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g:

x	-1		1		5	$+\infty$
e^{-x}	n.d.	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+6x-5$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de g	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

Portanto, para $k=-1$ e $x\in\left]-1,+\infty\right[$, a função g é decrescente em $\left]-1,1\right]$ e em $\left[5,+\infty\right[$ e é crescente em $\left[1,5\right]$. Tem mínimo relativo em $x=1$ e máximo relativo em $x=5$.

32. Tem-se, $\log_5\left(\frac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)=\log_5\left(\sqrt{\left(5^3\right)^x}\right)-\log_5\left(5a^x\right)=\log_5\left(\sqrt{5^{3x}}\right)-\left(\log_5(5)+\log_5\left(a^x\right)\right)=$

$$=\log_5\left(5^{\frac{3x}{2}}\right)-\left(1+x\log_5 a\right)\underset{\log_5 a=x}{=}\frac{3x}{2}-1-x\times x=-x^2+\frac{3x}{2}-1$$

Resposta: A

33. Pretende-se mostrar que existe pelo menos um $c\in\left]1,3\right[$ tal que $(g\circ f)(c)=(f\times g)(c)$, de uma forma equivalente, que existe pelo menos um $c\in\left]1,3\right[$ tal que $(g\circ f)(c)-(f\times g)(c)=0$.

Seja h, a função definida em $[1,3]$ por $h(x)=(g\circ f)(x)-(f\times g)(x)$. Vamos mostrar que a função h tem pelo menos um zero em $\left]1,3\right[$.

Tem-se:

- a função h é contínua em $[1,3]$ por ser o produto, a composição e a diferença entre funções contínuas no seu domínio;

- $h(1)=(g\circ f)(1)-(f\times g)(1)=g(f(1))-f(1)\times g(1)=g(3)-3\times\log_3(1)=\log_3(3)-3\times 0=1-0=1$

$\therefore\ h(1)>0$;

- $h(3)=(g\circ f)(3)-(f\times g)(3)=g(f(3))-f(3)\times g(3)=\log_3(f(3))-f(3)\times\log_3(3)=$

$$=\log_3(f(3))-f(3)\times 1=\log_3(f(3))-f(3)$$

Como f é positiva em $\mathbb{R}$, $0<f(3)<1$, pelo que $\log_3(f(3))<0$, pelo que $\underbrace{\log_3(f(3))}_{<0}-\underbrace{f(3)}_{>0}<0$.

$\therefore\ h(3)<0$.

Logo, como $h(1)$ e $h(3)$ têm sinais contrários ($\Rightarrow h(1)\times h(3)<0$), e como h é contínua em $[1,3]$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função h tem pelo menos um zero em $]1,3[$, ou seja, existe pelo menos um $c\in]1,3[$ tal que $h(c)=(g\circ f)(c)-(f\times g)(c)=0$, pelo que a equação dada é possível em $]1,3[$.

34.1 No início do movimento a distância da esfera ao chão é dada por:

$$d(0)=3+3,5e^{-0,31\times 0}\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi\times 0}{3}\right)=3+3,5e^{0}\operatorname{sen}(0)=3+3,5\times 1\times 0=3+0=3$$

Como a distância do centro da esfera ao chão no início do movimento é igual a $3,5$ cm, a medida do comprimento do raio da esfera é igual a $3,5-d(0)=3,5-3=0,5$ cm.

Portanto, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera é igual a:

$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi\times raio^3=\frac{4}{3}\pi\times(0,5)^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\frac{4\pi}{24}=\frac{\pi}{6}$$

Resposta: A

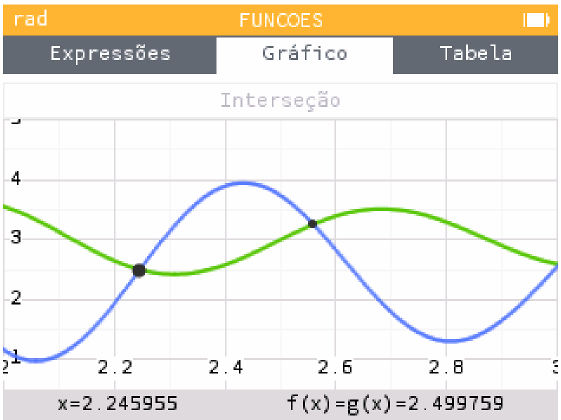
34.2 Sabemos que, durante o terceiro segundo de movimento, existem dois instantes, t_1 e t_2, tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15%.

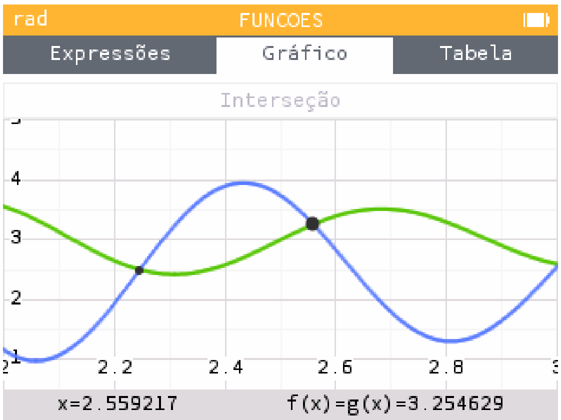
Tem-se que $d(t)$ é a distância da bola ao solo num certo instante t e que $d(t+3,5)$ é a distância da bola ao solo três segundos e meio após o instante t.

Assim, pretende-se terminar os instantes $t\in[3,4]$ tais que:

$$d(t+3,5)=d(t)-0,15d(t)\Leftrightarrow d(t+3,5)=0,85d(t)$$

Utilizando o editor de função da calculadora gráfica, definem-se as funções $y=d(t+3,5)$ e $y=0,85d(t)$:





Portanto, $d(t+3{,}5)=0{,}85\,d(t) \Leftrightarrow t=t_1 \ \vee \ t=t_2$, em que $t_1 \approx 2{,}2$ e $t_2 \approx 2{,}6$.

Nota: foi usada a calculadora gráfica Numworks, em que se definiu $d(x)=3+3{,}5e^{-0{,}31x}\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi x}{3}\right)$, $f(x)=0{,}85d(x)$ e $g(x)=d(x+3{,}5)$.

35.1 O domínio de validade da equação é $\mathbb{R}^+$.

Tem-se $f(x)+x^2=2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x-2+x^2=2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x+x^2=2\ln x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(\ln x+1)=2(\ln x+1) \Leftrightarrow x^2(\ln x+1)-2(\ln x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x+1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \ \vee \ x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-1 \ \vee \ x^2=2 \Leftrightarrow x=e^{-1} \ \vee \ x=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e} \ \vee \ x=-\sqrt{2} \ \vee \ x=\sqrt{2}$$

Como $-\sqrt{2}\notin\mathbb{R}^+$ $\frac{1}{e}\in\mathbb{R}^+$ e $\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{1}{e},\sqrt{2}\right\}$.

35.1 Tem-se:

- $f'(x)=\left(x^2\ln x-2\right)'=\left(x^2\right)'\ln x+x^2(\ln x)'-0=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{x}}=2x\ln x+x$

- $f''(x)=(2x\ln x+x)'=(2x\ln x)'+x'=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+1=2\ln x+2\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}+1=2\ln x+3$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+3=0 \Leftrightarrow 2\ln x=-3 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

Fazendo um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
Gráfico de f	n.d.	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right[$. Tem ponto de inflexão em $x = e^{-\frac{3}{2}}$, cuja ordenada é:

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} - 2 = e^{-3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -\frac{3e^{-3}}{2} - 2$$

Portanto, as coordenadas do ponto de inflexão são $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3e^{-3}}{2} - 2\right)$.

36.1 Como $h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 2 = \cos^2(2x + \pi) - 2 = (-\cos(2x))^2 - 2 = \cos^2(2x) - 2 = h(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2}$ é período da função h.

Resposta: D

36.2 Tem-se que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \cos^2(2x) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2(2x) \leq -1$, pelo que como a função h assume todos os valores entre -2 e -1, o seu contradomínio é $[-2, -1]$.

Logo, como o contradomínio da função h é $[-2, -1]$, h não tem zeros.

36.3 Seja t a reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$.

O declive da reta t, m_t é dado por $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Tem-se que, $h'(x) = \left(\cos^2(2x) - 2\right)' = 2\cos(2x) \times (\cos(2x))' - 0 = 2\cos(2x) \times (-2) \times \operatorname{sen}(2x) =$

$$= -4\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$$

Logo, $m_t = h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$, pelo que a equação reduzida da reta t é da forma $t = \sqrt{3}x + b$.

As coordenadas do ponto de tangência são $\left(\frac{\pi}{3}, h\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, em que:

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(2\times\frac{\pi}{3}\right) - 2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

Logo, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta t:

$$-\frac{7}{4} = \sqrt{3}\times\frac{\pi}{3} + b \Leftrightarrow b = -\frac{7}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta t é $t = \sqrt{3}x - \frac{7}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

37. Tem-se que $D = \{x \in \mathbb{R} : x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\} = \{x \in \mathbb{R} : x>-3 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\} =]0,3[$.

Neste domínio, tem-se:

$$\log_4(x+3) = \log_4(6-2x) - \log_2\left(\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow \log_4(x+3) = \log_4(6-2x) - \log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \log_4(x+3) = \log_4(6-2x) - \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} \log_4(x+3) = \log_4(6-2x) - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \times \frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 2}}$$

$$\boxed{i)\ \log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}}$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow} \log_4(x+3) = \log_4(6-2x) - \log_4 x$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+3) + \log_4 x = \log_4(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow \log_4\left(x(x+3)\right) = \log_4(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 6 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\times1\times(-6)}}{2\times1}$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \ \vee \ x = 1$$

Como $-6 \notin D$ $\frac{1}{e} \in \mathbb{R}^+$ e $1 \in D$, o conjunto-solução da equação é $\{1\}$.

38. A função g é contínua em $\left[-1,+\infty\right[$, pelo que é contínua em $x=k$ e, portanto,

$$\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^+} g(x)=g(k)$$

Assim:

- $\lim\limits_{x\to k^+} g(x)=\lim\limits_{x\to k^+} x=k$
- $g(k)=k$
- $\lim\limits_{x\to k^-} g(x)=\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{x e^{x-k}-k}{\operatorname{sen}(k-x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{\dfrac{x e^{x-k}-k}{x-k}}{\dfrac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{x e^{x-k}-k}{x-k}}{\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}}=$

$$\underset{\substack{y=x-k\Leftrightarrow x=y+k\\ Logo,\ k-x=-(x-k)=-y\\ x\to k^-\Rightarrow y\to 0^-}}{=}\frac{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{(y+k)e^{y}-k}{y}}{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{y}}\underset{\operatorname{sen}(-y)=-\operatorname{sen} y}{=}\frac{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y e^{y}+k e^{y}-k}{y}}{-\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite notável}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\cancel{y}e^{y}}{\cancel{y}}+\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{k\left(e^{y}-1\right)}{y}}{-1}=-e^{0}-k\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Limite notável}}=-1-k\times 1=-1-k$$

Logo, $-1-k=k\Leftrightarrow -1=2k\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$.

Usando a regra de L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{x\to k^-} g(x)$:

$$\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^-}\frac{x e^{x-k}-k}{\operatorname{sen}(k-x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to k^-}\frac{\left(x e^{x-k}-k\right)'}{\left(\operatorname{sen}(k-x)\right)'}=\lim_{x\to k^-}\frac{x'e^{x-k}+x\left(e^{x-k}\right)'-0}{-\cos(k-x)}=$$

$$=\lim_{x\to k^-}\frac{e^{x-k}+xe^{x-k}}{-\cos(k-x)}=\frac{e^{0}+ke^{0}}{-\cos(0)}=\frac{1+k}{-1}=-1-k$$

39.1 Como existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ então $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ $(0 \notin D_g)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\text{sen}^2 x}}{4x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\times\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right) = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\text{sen}\, x}{x} = \dfrac{1}{4}\times 1\times 1 = \dfrac{1}{4}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+f(x)}{x+2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}(2x) + \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)} = \dfrac{2\times 0 + \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{0+2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{2}$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, então é contínua em $x=0$, pelo que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{2} = \dfrac{f(0)}{2}$ e, portanto, $\dfrac{f(0)}{2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Usando a regra de L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2 x}{4x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)'}{\left(4x^2\right)'} = \lim_{x\to 0^-}\frac{0-2\cos x(-\text{sen}\, x)}{8x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2\,\text{sen}\, x\cos x}{8x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\left(2\,\text{sen}\, x\cos x\right)'}{(8x)'} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(2\,\text{sen}\, x)'\times\cos x + 2\,\text{sen}\, x\times(\cos x)'}{8} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{2\cos x\times\cos x + 2\,\text{sen}\, x\times(-\text{sen}\, x)}{8} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2\cos^2 x - 2\,\text{sen}^2 x}{8} =$$

$$= \frac{2\cos^2(0) - 2\,\text{sen}^2(0)}{8} = \frac{2\times 1^2 - 2\times 0^2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

39.2 Como a função f é derivável em $\mathbb{R}$, o que implica que também o é em $x=1$, e como tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1, então $f'(1)=0$ e $f(1)=2$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Assim, o declive da reta t é dado por $g'(1)$ e o ponto de coordenadas $(1, g(1))$ pertence ao gráfico de g.

Assim, $g'(x) = \left(\dfrac{2x+f(x)}{x+2}\right)' = \dfrac{(2x+f(x))'(x+2)-(2x+f(x))(x+2)'}{(x+2)^2} =$

$$= \frac{(2+f'(x))(x+2)-(2x+f(x))\times 1}{(x+2)^2} = \frac{(2+f'(x))(x+2)-2x-f(x)}{(x+2)^2}.$$

Logo, o declive da reta t é igual a $g'(1)=\dfrac{(2+f'(1))(1+2)-2\times1-f(1)}{(1+2)^2}=\dfrac{(2+0)\times3-2-2}{3^2}=\dfrac{6-4}{9}=\dfrac{2}{9}$,

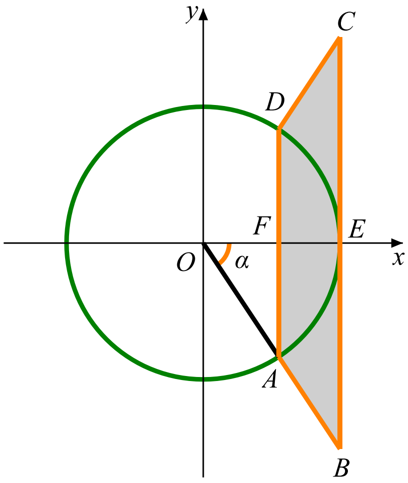
pelo que a equação reduzida da reta t é da forma $y=\dfrac{2}{9}x+b$.

Como $g(1)=\dfrac{2\times1+f(1)}{1+2}=\dfrac{2+2}{3}=\dfrac{4}{3}$, substituindo as coordenadas $(1,g(1))$ na equação de t:

$$\frac{4}{3}=\frac{2}{9}\times1+b\Leftrightarrow b=\frac{4}{3}-\frac{2}{9}\Leftrightarrow b=\frac{10}{9}$$

$\therefore\ t: y=\dfrac{2}{9}x+\dfrac{10}{9}$

40.1 Consideremos a seguinte figura, em que F é o ponto de interseção do lado $[AD]$ com o eixo Ox.



A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}$.

Como $\overline{AD}=2\overline{AF}$, $\overline{BC}=2\overline{BE}$ e $\overline{EF}=1-\overline{OF}$, tem-se que:

$$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}=\frac{2\overline{AF}+2\overline{BE}}{2}\times\left(1-\overline{OF}\right)=$$

$$=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)$$

As coordenadas do ponto A são $(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha>0$ e $\operatorname{sen}\alpha<0$, e as do ponto B são $(1,\operatorname{tg}\alpha)$, com $\operatorname{tg}\alpha<0$. Assim, $\overline{AF}=-\operatorname{sen}\alpha$, $\overline{BE}=-\operatorname{tg}\alpha$ e $\overline{OF}=\cos\alpha$ e, portanto:

$$A_{[ABCD]}=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)=(-\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=$$

$$=-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\times\cancel{\cos\alpha}=\cancel{-\operatorname{sen}\alpha}+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\cancel{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$=\operatorname{sen}\alpha\left(-\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\operatorname{sen}\alpha\times\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha}=\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}_{\operatorname{tg}\alpha}\times\underbrace{\left(\cos^2\alpha-1\right)}_{-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\operatorname{sen}^2\alpha\times\operatorname{tg}\alpha$$

40.2 Tem-se que $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$, pelo que $-\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Pela fórmula fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, tem-se que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha=1-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{6} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{5}{6} \underset{\substack{\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\\ \operatorname{sen}\alpha<0}}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Logo, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{6}}}=-\sqrt{5}$, pelo que a área do trapézio é $-\frac{5}{6}\times\left(-\sqrt{5}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

41. Tem-se que:

(A) se $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$, então $g(\beta)=g\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\neq\frac{1}{3}$;

(B) se $\beta=\pi+\alpha$, então $g(\beta)=g(\pi+\alpha)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$;

(C) se $\beta=2\pi-\alpha$, então $g(\beta)=g(2\pi-\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$;

(D) se $\beta=2\pi+\alpha$, então $g(\beta)=g(2\pi+\alpha)=\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Resposta: B

42.

- A afirmação é **I.** é falsa. Por exemplo, $0<\frac{3\pi}{4}$ e $\operatorname{tg}(0)=0>-1=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

- A afirmação é **II.** é verdadeira. O período positivo mínimo da função tangente é π, pelo que $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x$, para todo o x e pertencente ao domínio da função tangente e $k\in\mathbb{Z}$. Logo, para $k=2$, tem-se $\operatorname{tg}(x+2\pi)=\operatorname{tg}x$, donde se conclui que 2π é período da função tangente.

Resposta: C

43.1 O período mínimo positivo da função x é $\frac{2\pi}{|3\pi|}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$.

Se num dado instante t a abcissa de P é x_0, passados $\frac{2}{3}$ de um minuto, isto é, 40 segundos, a abcissa de P volta a ser x_0.

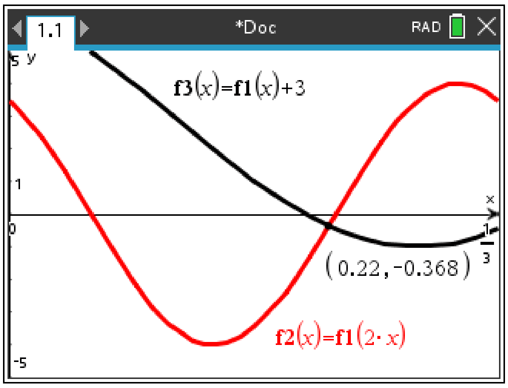
43.2 Tem-se que, para todo o $t \geq 0$, $-1 \leq \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, pelo que $-4 \leq 4\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 4$.

Como a função x toma todos os valores entre -4 e 4, incluindo estes, toma também o valor 0, isto é, a abcissa de P é 0 para algum instante t, pelo que a distância mínima de P à origem é 0.

43.3 Os primeiros vinte segundos do movimento correspondem ao intervalo de tempo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

No instante t_0 a abcissa do ponto P é dada por $x(t_0)$. Passado o mesmo tempo que decorreu até ao instante t_0, isto é, $t_0 + t_0 = 2t_0$, a abcissa do ponto P é dada por $x(2t_0)$ e, nesse instante, a abcissa de P aumentou 3 unidades em relação à abcissa de P no instante t_0, ou seja, $x(2t_0) = x(t_0) + 3$.

Portanto, pretende-se determinar $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ tal que $x(2t) = x(t) + 3$.



Logo, $t_0 \approx 0,22$ (na imagem, f_1 corresponde à função x).

Nota: foi usada a calculadora gra fica TI n-spire, em que $f_1(x) = 4\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

44. Tem-se que $\lim u_n = \lim\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim\left(\left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\lim\left(1-\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{e^{-k}}{e^k}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(e^{-2k}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2k}{3}}$.

Logo, $\lim f(u_n) \underset{f \text{ é contínua em } \mathbb{R}^+}{=} f(\lim u_n) = f\left(e^{-\frac{2k}{3}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{2k}{3}}\right) = -\frac{2k}{3}$.

Portanto, $\lim f(u_n) = 1-k \Leftrightarrow -\frac{2k}{3} = 1-k \Leftrightarrow -\frac{2k}{3} + k = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$.

Resposta: C

45.

(I) A reta de equação $y+3=2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, pelo que o ponto de coordenadas $(2, f(2))$ pertence a esta reta.

Assim, $f(2)+3=2\times 2 \Leftrightarrow f(2)=4-3 \Leftrightarrow f(2)=1$.

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então também é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, também é contínua em $x=2$, pelo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(e^{x-2}\left(f(x)+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to 2} e^{x-2}\times\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+1\right)=e^{2-2}\times\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)+1\right)=e^{0}\times(1+1)=2$.

∴ A afirmação **(I)** é falsa.

(II) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e 1 é um mínimo absoluto de f', $f'(x)\geq 1$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, o que implica que $f'(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, pelo que f é crescente em $\mathbb{R}$.

∴ A afirmação **(II)** é falsa.

(III) Como $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$, a reta de equação $y=2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando x tende para $-\infty$, pelo que $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^{x-2}\left(f(x)+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x-2}\times\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)+1}{x}=e^{-\infty}\times\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}\right)=$

$$=0\times\left(2+\frac{1}{-\infty}\right)=0\times(2+0)=0$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{x}=0$, se o gráfico de g tiver assíntota, quando x tende para $-\infty$, será horizontal, pelo que não pode ter assíntota oblíqua, quando x tende para $-\infty$.

∴ A afirmação **(III)** é falsa.

46. A soma das raízes índice n de qualquer número complexo é 0. Assim, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 as raízes quartas de z, então $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ e tomando, por exemplo, $z_1+z_2+z_3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$, vem que:

$$\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}+z_4=0 \Leftrightarrow z_4=-\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

Logo:

$$z=(z_4)^4=\left(-\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4=\left(-\sqrt{2}\right)^4 e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\times 4\right)}=4e^{i\frac{5\pi}{3}}=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-2\sqrt{3}\,i$$

Resposta: D

47. Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$.

Tem-se $(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2=16 \Leftrightarrow \left(x+\cancel{yi}+x-\cancel{yi}\right)^2-\left(x+yi-(x-yi)\right)^2=16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x)^2-\left(\cancel{x}+yi-\cancel{x}+yi\right)^2=16 \Leftrightarrow 4x^2-(2yi)^2=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4y^2i^2=16 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2=16 \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=4$$

Logo, a condição dada define uma circunferência de raio 2 centrada na origem.

Resposta: C

48. Seja $w_2=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$.

Tem-se $(w_1)^2\times\overline{w_2}=(1-2i)^2(a-bi)=\left(1-4i+4i^2\right)(a-bi)=(1-4i-4)(a-bi)=(-3-4i)(a-bi)=$

$$=-3a+3bi-4ai+4bi^2=-3a-4b+i(3b-4a)$$

Como $(w_1)^2\times\overline{w_2}\in A$, $\text{Re}\left((w_1)^2\times\overline{w_2}\right)=0$ e $\text{Im}\left((w_1)^2\times\overline{w_2}\right)>0$, ou seja, $-3a-4b=0$ e $3b-4a>0$.

Assim:

- $\text{Re}\left((w_1)^2\times\overline{w_2}\right)=0 \Leftrightarrow -3a-4b=0 \Leftrightarrow -3a=4b \Leftrightarrow a=-\dfrac{4b}{3}$;
- $\text{Im}\left((w_1)^2\times\overline{w_2}\right)>0 \Leftrightarrow 3b-4a>0 \underset{a=-\frac{4b}{3}}{\Leftrightarrow} 3b-4\times\left(-\dfrac{4b}{3}\right)>0 \Leftrightarrow 3b+\dfrac{16b}{3}>0 \Leftrightarrow \dfrac{25b}{3}>0 \Leftrightarrow b>0$.

Assim, como $a=-\dfrac{4b}{3}$ e $b>0$, $a<0$, ou seja, $\text{Re}(w_2)=a<0$ e $\text{Im}(w_2)=b>0$, pelo que o afixo de w_2 pertence ao segundo quadrante.

49. Tem-se:

- $z_1 = e^{i\frac{13\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)} + \left(-e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}\right) = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)} + e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$;

- $z_2 = 2i^{110} - \sqrt{12}\,i^{33} \underset{\substack{110=4\times27+2 \\ 33=8\times4+1}}{=} 2i^2 - \sqrt{12}\,i^1 = -2-\sqrt{12}\,i$.

Escrevendo z_2 na forma trigonométrica:

- $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$;

- sendo α um argumento de z_2, tem-se $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{12}}{-2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ e α pertence ao terceiro quadrante,

pelo que α pode ser $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. Logo, $z_2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Seja $z_3 = |z_3|e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Então, $\frac{z_1 \times \overline{z}_2}{z_3} = \frac{2e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)} \times 4e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}}{|z_3|e^{i\theta}} = \frac{8e^{i\left(\frac{13\pi}{12}-\frac{4\pi}{3}\right)}}{|z_3|e^{i\theta}} = \frac{8}{|z_3|}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$.

Este número complexo satisfaz a condição $|z| = \sqrt{2} \;\wedge\; \operatorname{Re}(z) = 0 \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) > 0$. Assim, o seu módulo é $\sqrt{2}$, pelo que:

$$\frac{8}{|z_3|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8 = \sqrt{2}|z_3| \Leftrightarrow |z_3| = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z_3| = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |z_3| = 4\sqrt{2}.$$

Além disso, a sua parte real é 0 e a imaginária é positiva, o que quer dizer que o seu afixo pertence ao semieixo imaginário positivo e, portanto, um qualquer seu argumento é da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Logo:

$$-\frac{\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, $z_3 = 4\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$, pelo que:

$$z_3 = 4\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4-4i$$

50.1 Se o afixo $(z_2)^3$ pertence à circunferência de raio 8 centrada na origem, então $\left|(z_2)^3\right| = 8$. Assim, como $(z_2)^3$ é um número real negativo, vem que $(z_2)^3 = -8$. Logo:

$$(z_2)^3 = -8 \underset{-8=e^{i\pi}}{\Leftrightarrow} \left(re^{i\alpha}\right)^3 = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow r^3 e^{i(3\alpha)} = 8e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = \pi + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, $r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$ e $3\alpha = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, pelo que $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$.

Resposta: B

50.2 Tem-se que:

- $\left|z_2(1-i)\right| = 1 \Leftrightarrow |z_2| \times |1-i| = 1 \Leftrightarrow |z_2| \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 1 \Leftrightarrow |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- o afixo de z_2 tem as coordenadas simétricas, pelo que pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Assim, como $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ (é um argumento de z_2), vem que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, pelo que $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e, portanto:

$$(z_2)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\times 3\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2\cancel{\sqrt{2}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

Então, $(z_2)^3 + \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$.

Escrevendo $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ na forma trigonométrica, vem:

- $\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

- sendo θ um argumento de $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}=-1$ e θ pertence ao quarto quadrante, pelo

que θ pode ser $-\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\ (z_2)^3+\frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

51.1 Tem-se $z^2-z_2\,\overline{z}=0\Leftrightarrow z^2=z_2\,\overline{z}$.

Seja $z=|z|e^{i\alpha}$, com $\alpha\in\mathbb{R}$. Então, $z^2=|z|^2\,e^{i(2\alpha)}$ e $\overline{z}=|z|e^{i(-\alpha)}$, e, portanto:

$$z^2-z_2\,\overline{z}=0\Leftrightarrow z^2=z_2\,\overline{z}\Leftrightarrow|z|^2\,e^{i(2\alpha)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}\times|z|e^{i(-\alpha)}\Leftrightarrow|z|^2\,e^{i(2\alpha)}=2|z|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Portanto:

- $|z|^2=2|z|\Leftrightarrow|z|^2-2|z|=0\Leftrightarrow|z|\left(|z|-2\right)=0\Leftrightarrow|z|=0\ \vee\ |z|-2=0\Leftrightarrow|z|=0\ \vee\ |z|=2$

- $2\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow3\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Assim:

- se $|z|=0$, então $z=0$, que não pertence a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$;

- se $|z|=2$, então:

  - se $k=0$, então $\alpha=\frac{\pi}{6}$, pelo que $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$;

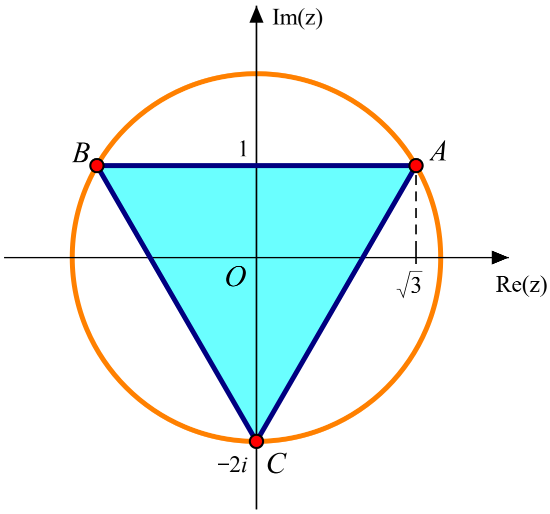
  - se $k=1$, então $\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$, pelo que

$$z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i;$$

  - se $k=2$, então $\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$, pelo que $z=2e^{i\frac{3\pi}{3}}=-2i$.

O conjunto-solução da equação é $\left\{\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}+i,-2i\right\}$.

Representando os afixos das soluções no plano complexo, em que A é o afixo de $1+\sqrt{3}\,i$, B é o afixo de $-1+\sqrt{3}\,i$ e C é o afixo de $-2i$:



Assim, $A_{[ABC]}=\dfrac{2\times\sqrt{3}\times 3}{2}=3\sqrt{3}$.

51.2 Tem-se que:

- $z_1=\dfrac{4+2i}{1-i}+2i^{2022} \underset{2022=4\times505+2}{=} \dfrac{4+2i}{1-i}\times\dfrac{1+i}{1+i}+2i^{2}=\dfrac{4+4i+2i+2i^2}{1^2-i^2}-2=\dfrac{4+6i-2}{2}-2=\dfrac{2+6i}{2}-2=$

$$=\frac{2}{2}+\frac{6i}{2}-2=-1+3i$$

Logo, $z_1-z_2=-1+3i-2e^{i\frac{\pi}{2}}=-1+3i-2i=-1+i$

Escrevendo z_1-z_2 na forma trigonométrica:

- $|z_1-z_2|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$;

- sendo θ um argumento de z_1-z_2, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{-1}=-1$ e θ pertence ao segundo quadrante, pelo que θ pode ser $-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$. Logo, $z_1-z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Então, $\dfrac{z_1-z_2}{\left(\underbrace{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}_{=e^{i(-\alpha)}}\right)^5}=\dfrac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(e^{i(-\alpha)}\right)^5}=\dfrac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i(-5\alpha)}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+5\alpha\right)}$.

O afixo do número complexo $\frac{z_1 - z_2}{(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)^5}$ pertence à bissetriz do primeiro quadrante se qualquer seu argumento for da forma $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $\frac{3\pi}{4} + 5\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

- se $k = 0$, então $\alpha = -\frac{\pi}{10}$; $-\frac{\pi}{10} \notin]0, \pi[$
- se $k = 1$, então $\alpha = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$; $\frac{3\pi}{10} \in]0, \pi[$
- se $k = 2$, então $\alpha = -\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$; $\frac{7\pi}{10} \in]0, \pi[$
- se $k = 3$, então $\alpha = \frac{11\pi}{10}$; $\frac{11\pi}{10} \notin]0, \pi[$

$\therefore \alpha = \frac{3\pi}{10} \vee \alpha = \frac{7\pi}{10}$.

52. Tem-se que $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Sendo α um argumento de z, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$ e α pertence ao segundo quadrante, pelo que α pode ser $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Logo, $z = |z| e^{i\frac{3\pi}{4}}$, pelo que $\bar{z}^3 = \left(|z| e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\right)^3 = |z|^3 e^{i\left(-\frac{3\pi}{4} \times 3\right)} = |z|^3 e^{i\left(-\frac{9\pi}{4}\right)} = |z|^3 e^{i\left(-\frac{9\pi}{4} + 2\pi\right)} = |z|^3 e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, e, portanto, o afixo de $\bar{z}^3$ pertence à bissetriz do quarto quadrante.

Resposta: B

53. Tem-se que $z = -\frac{4e^{i\alpha}(2-i)}{1+2i} = -4e^{i\alpha} \times \frac{2-i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = -4e^{i\alpha} \times \frac{2 - 4i - i + 2i^2}{1^2 - 4i^2} = -4e^{i\alpha} \times \frac{\cancel{2} - 5i - \cancel{2}}{1+4} =$

$$= -4e^{i\alpha} \times \frac{-\cancel{5}i}{\cancel{5}} = 4e^{i\alpha} \times i \underset{i = e^{i\frac{\pi}{2}}}{=} 4e^{i\alpha} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 4e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Escrevendo $-2\sqrt{3} + 2i$ na forma trigonométrica, vem:

- $\left|-2\sqrt{3} + 2i\right| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

- sendo θ um argumento de $-2\sqrt{3}+2i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{-2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e θ pertence ao segundo quadrante, pelo que θ pode ser $-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$.

Logo, $-2\sqrt{3}+2i=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Como z e $-2\sqrt{3}+2i$ são raízes quartas de um mesmo número complexo, tem-se:

$$z^4=\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^4 \Leftrightarrow \left(4e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\right)^4=\left(4e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^4 \Leftrightarrow 4^4e^{i\left(4\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)}=4^4e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\times 4\right)} \Leftrightarrow 256e^{i(4\alpha+2\pi)}=256e^{i\frac{10\pi}{3}}$$

Portanto, $4\alpha=\frac{10\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha=\frac{10\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha=\frac{5\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Assim:

- se $k=0$, então $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$
- se $k=-1$, então $\alpha=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}\notin\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$
- se $k=1$, então $\alpha=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}\notin\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

$\therefore\ \alpha=\frac{5\pi}{6}$.

54. Tem-se que:

- $\frac{1}{z}+\overline{z}=\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{12}}}+e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \underset{1=e^{i(0)}}{=} \frac{e^{i(0)}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}+e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=e^{i\left(0-\frac{\pi}{12}\right)}+e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}+e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

- $\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$.

Sendo θ um argumento de $-1+\sqrt{3}i$, tem-se $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$ e θ pertence ao segundo quadrante, pelo que θ pode ser $-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$. Então, $-1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Assim, $w^n=\left(\left(\frac{1}{z}+\overline{z}\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right)^n=\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n=\left(4e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^n=\left(4e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=4^ne^{i\left(\frac{7n\pi}{12}\right)}$.

O número complexo w^n é um número real negativo se qualquer seu argumento for da forma $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\frac{7n\cancel{\pi}}{12} = \cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi} \Leftrightarrow \frac{7n}{12} = 1 + 2k \Leftrightarrow 7n = 12 + 12 \times 2k \Leftrightarrow n = \frac{12 + 24k}{7}, \ k \in \mathbb{Z}$$

O primeiro número natural tal que w^n é um número real negativo obtém-se para $k = 3$.

Logo, $n = \frac{12 + 24 \times 3}{7} \Leftrightarrow n = 12$.

FIM