Avaliação – Itens para preparar o exame nacional

Matemática A | 12.º Ano

Tópicos: Estatística, Sucessões, Geometria, Combinatória e Probabilidades, Funções e Números Complexos.

Estatística

1. Uma empresa, que fabrica um certo tipo de peças, detetou algumas peças defeituosas. Foi inspecionada uma amostra com várias caixas, contendo, cada uma, 100 peças, tendo-se verificado o seguinte:

Número de peças defeituosas	1	2	3	4	5	6
Número de caixas	5	38	42	67	15	3

Completa cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreve, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A moda desta amostra é __**I**__ e o valor da média, arredondado às centésimas, é __**II**__.

A percentagem de caixas com menos de quatro peças defeituosas é __**III**__.

O valor do desvio-padrão desta amostra, arredondado às centésimas, é __**IV**__.

I	**II**	**III**	**IV**
a) 2	**a)** $3{,}34$	**a)** 11%	**a)** $1{,}06$
b) 3	**b)** $3{,}44$	**b)** 50%	**b)** $1{,}07$
c) 4	**c)** $3{,}54$	**c)** 89%	**c)** $1{,}08$

2. Na tabela, apresentam-se oito medições efetuadas da velocidade, em km/h, de um veículo indicada no seu velocímetro, e da respetiva velocidade indicada num navegador de GPS.

Velocidade no velocímetro (km/h)	20	40	50	60	80	100	120	130
Velocidade no GPS (km/h)	19,9	39,5	48,3	58	77,8	97,6	117	126,8

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

Considera que existe correlação linear entre a velocidade indicada no velocímetro e a velocidade indicada no navegador de GPS.

Numa deslocação, num dado instante, o velocímetro do veículo indica uma velocidade de 110 km/h.

Qual deverá ser a velocidade indicada no GPS, de acordo com o modelo de regressão linear?

Na tua resposta, apresenta os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear, com quatro casas decimais, e o resultado arredondado às décimas.

3. Um centro de estudos fez um pequeno estudo para analisar a relação entre as médias finais nas disciplinas de Matemática e de Física e Química de seis dos seus alunos.

Na tabela seguinte apresentam-se as referidas médias, onde x é a média final da disciplina de Matemática e y é a média final na disciplina de Física e Química.

x	17,1	13	15,7	16,7	11	10,5
y	17,5	14,1	14,3	15,2	12,3	9,8

Completa cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreve, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana da variável x é igual a __**I**__ e a média da variável y é, com arredondamento às décimas, igual a __**II**__ valores.

Podemos dizer que entre média final na disciplina de Matemática e a média final na disciplina de Física e Química existe uma correlação linear __**III**__.

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x obtido a partir dos dados representados na tabela, utilizando parâmetros arredondados às milésimas, estima-se que um aluno com uma média de 16,1 a Matemática tenha, aproximadamente, __**IV**__ de média na disciplina de Física e Química.

I	II	III	IV
a) 13	**a)** 13,9	**a)** positiva fraca	**a)** 14,9
b) 14,35	**b)** 14,0	**b)** negativa forte	**b)** 15,6
c) 15,7	**c)** 14,2	**c)** positiva forte	**c)** 16,7

Sucessões

4. Considera a sucessão (u_n), definida por $u_n = \dfrac{2-5n}{n+7}$.

4.1 Verifica se -4 é termo da sucessão (v_n) e, em caso afirmativo, indica a respetiva ordem.

4.2 Mostra que a sucessão é monótona.

4.3 Para um certo valor real de a, seja (v_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = 8u_n - v_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Sabe-se que o terceiro termo da sucessão é $-\dfrac{55}{9}$.

Qual é o valor de a?

A -2 **B** -1 **C** 1 **D** 2

5. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_8 + u_{20} = 11$.

5.1 Qual é o valor de $u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{15} + u_{16}$?

A $\dfrac{11}{2}$ **B** $\dfrac{33}{2}$ **C** $\dfrac{55}{2}$ **D** $\dfrac{77}{2}$

5.2 Sabendo que $u_{12} = 5$, determina o termo geral de (u_n).

6. Seja (w_n) uma progressão geométrica, de termos não nulos, tal que $w_{n+3} + w_n = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

A soma dos 2026 primeiros termos de (w_n) é igual a:

A $-w_1$ **B** 0 **C** w_1 **D** 2026

7. Considera a progressão aritmética (u_n), tal que a soma dos seus n primeiros termos é dada por $n^2 + \dfrac{3n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Determina o termo geral da progressão aritmética (u_n).

8. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_2 = u_8 + 12$.

8.1 Mostra que a razão da progressão aritmética (u_n) é -2.

8.2 Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = \dfrac{3^{u_n}}{27^{-n}}$.

a) Mostra que (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

b) Sabendo que a soma dos dez primeiros termos de (v_n) é $118\ 096$, determina o seu termo geral, escrevendo-o na forma $a \times b^n$, sendo a e b números racionais, e justifica se a sucessão é crescente ou decrescente.

9. Qual é o valor de $\lim\left(\dfrac{n+2}{n+5}\right)^{2n}$?

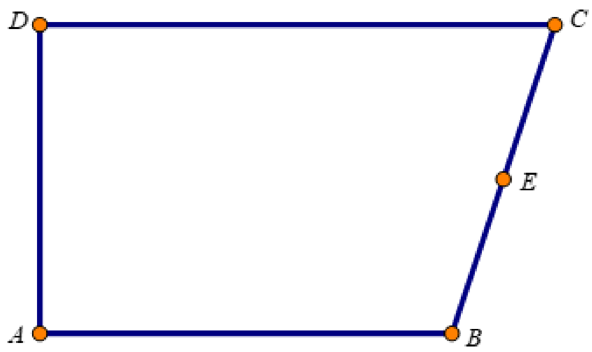
A e^{-6} **B** e^{-3} **C** e^{3} **D** e^{6}

Geometria

10. Na figura está representado o trapézio retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- E é o ponto médio do lado $[BC]$;
- $\overline{AB} = 8$;
- $\overline{AD} = 6$;
- $\overline{CD} = 10$.



Qual é o valor de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$?

A -48

B -50

C -52

D -54

11. Considera, em referencial o.n. Oxy, a reta r de equação $10y+5x=6$.

Seja s a reta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas $(1,4)$.

Qual é a equação reduzida da reta s?

A $y=2x+2$

B $y=-2x+6$

C $y=-2x+\frac{5}{3}$

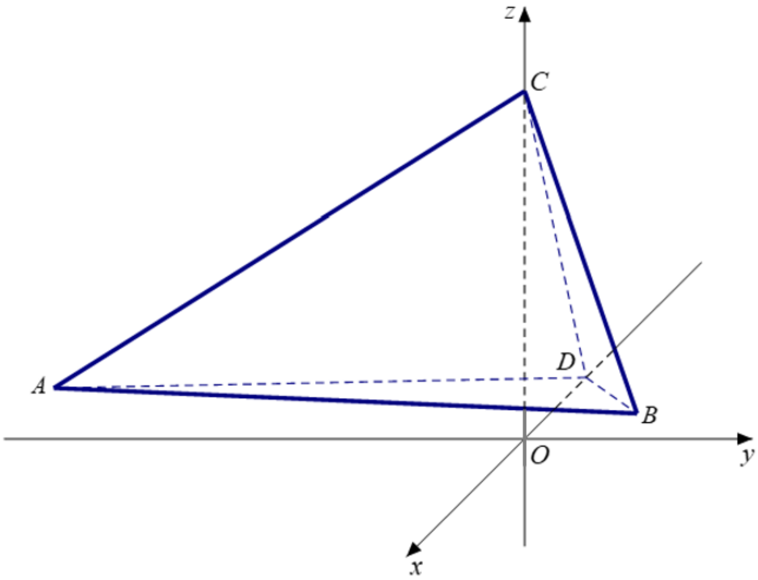
D $y=2x+\frac{3}{5}$

12. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao eixo Oz;
- $\overrightarrow{AC}(-4,4,2)$;
- $D(-2,0,0)$;
- uma equação do plano ABC é

$$2x+y+2z=8.$$



12.1 Mostra que as coordenadas do ponto C são $(0,0,4)$ e que as coordenadas do ponto A são $(4,-4,2)$ e escreve a uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AC]$.

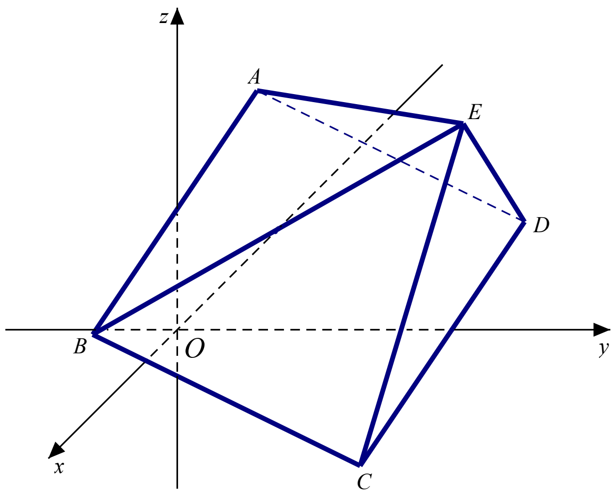
12.2 Determina uma equação cartesiana do plano paralelo a ABC que contém o ponto D.

Apresenta a equação na forma $ax+by+cz+d=0$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

12.3 Supõe que a área do triângulo $[ABC]$ é 12.

Determina o volume da pirâmide $[ABCD]$.

13. Na figura, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide reta $[ABCDE]$.



Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ é um losango;
- $A(0,1,3)$, $C(2,3,-1)$ e E pertence ao primeiro octante;
- uma equação do plano ABC é $x+y+z-4=0$;
- a altura da pirâmide é $3\sqrt{3}$.

13.1 Mostra que as coordenadas do ponto E são $(4,5,4)$.

13.2 Determina uma equação cartesiana do plano BDE.

13.3 Determina, em graus, com aproximação às centésimas, a amplitude do ângulo AEC.

14. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a reta r e o plano α, definidos por:

$$r:(x,y,z)=(0,2,3)+k\left(3,a,-\frac{1}{2}\right),\ k\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha: bx-3y+12z=1$$

Sabendo que a reta r é paralela a plano α, qual é o valor de $(a-b)^3$?

A -2 **B** -8 **C** 2 **D** 8

15. Considera todos os números naturais de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 0 a 9.

15.1 Quantos destes números são ímpares, têm exatamente dois zeros e não têm mais algarismos repetidos?

A 840

B 960

C 1680

D 1920

15.2 Quantos destes números têm os algarismos dispostos por ordem crescente ou por ordem decrescente?

16. Uma coleção de peças de porcelana tem dez pratos distintos, seis jarras distintas e dois vasos iguais.

16.1 O dono desta coleção pretender dispor todas as peças, lado a lado, numa prateleira.

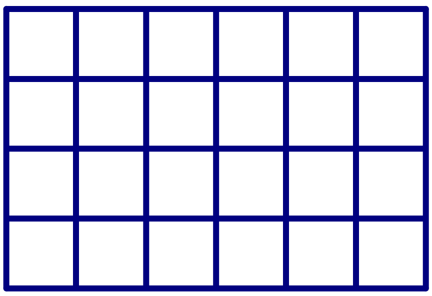
Quantas filas distintas se podem formar, de modo que os dois vasos fiquem em posições consecutivas?

Não é necessário apresentar o valor numérico.

16.2 Pretende-se escolher seis peças para uma exposição, de modo que não haja peças iguais.

Quantos conjuntos de seis peças distintas podem ser formados?

16.3 Para uma outra exposição, as dezoito peças vão ser dispostas num expositor com 24 compartimentos individuais, como representado na figura.



Quantas disposições distintas se podem formar, de modo que numa das filas horizontais apenas fiquem os dois vasos?

Uma expressão que permite determinar o número de disposições possíveis é $4 \times {}^{6}C_{2} \times {}^{18}A_{16}$.

Numa pequena composição, explica esta expressão no contexto do problema.

17. De um baralho completo de cartas, foram retiradas algumas e colocadas em cima de uma mesa.

Sabe-se que:

- em cima da mesa estão cartas vermelhas e pretas;
- existem 45 maneiras distintas de escolher duas das cartas vermelhas;
- colocando numa só fila todas as cartas, existem $174\,182\,400$ maneiras distintas de as cartas da mesma cor ficarem dispostas consecutivamente.

Quantas cartas foram colocadas em cima da mesa?

Sugestão: Designa por n o número de cartas vermelhas e por p o número de cartas pretas.

18. Onze amigos, entre os quais o Pedro, a Inês, a Sofia, a Maria e o João, pretendem colocar-se numa só fila para tirar uma foto.

Sabe-se que a Inês, a Sofia e a Maria pretendem ficar em posições consecutivas, e que o Pedro e o João não pretendem ficar em posições consecutivas.

Nas condições do enunciado, quantas filas distintas se podem formar?

A $1\,693\,440$

B $846\,720$

C $141\,120$

D $40\,320$

19. Considera uma certa linha n do triângulo de Pascal.

Sabe-se que ${}^{n}C_6 + {}^{n}C_7 + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_{20}$.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, determina a soma de todos os elementos da linha $n+1$.

20. Numa certa linha, n, do triângulo de Pascal, os três elementos centrais são a, b e c, tal que $a < b$ e $b > c$.

Qual é o elemento central da linha $n+2$?

A $a+b$

B $2a+2b$

C $a+2b$

D $2a+b$

21. Considera o desenvolvimento do binómio $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{x^2}\right)^{19}$, com $x>0$ e $a\in\mathbb{R}$.

O coeficiente do termo de segundo grau é 7752.

Qual é o valor de a?

A -3 **B** -2 **C** 2 **D** 3

22. Na fruteira que está na cozinha do João, há dez maçãs, seis laranjas e quatro bananas.

O João propôs à sua a irmã, a Catarina, ambos do 12.º ano, o seguinte problema:

«Considerando que as frutas do mesmo tipo são indistinguíveis, e todos os conjuntos com pelo menos uma peça de fruta que se podem formar com as que temos na fruteira, escolhendo ao acaso um desses conjuntos, qual é a probabilidade de conter exatamente cinco maçãs e pelo menos duas bananas?»

A Catarina conseguiu resolver o problema.

Qual foi a resposta que deu, sabendo que apresentou o resultado na forma de fração irredutível?

23. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam e A e B dois acontecimentos possíveis e independentes ($A\subset E$ e $B\subset E$) tais que:

- $P(B)=0{,}2$
- $P(A|B)=0{,}7$

Qual é o valor de $P(\overline{A}\cup B)$?

A $0{,}26$ **B** $0{,}36$ **C** $0{,}44$ **D** $0{,}84$

24. Num grupo de doze pessoas, nove são mulheres e os restantes são homens.

24.1 Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, quatro das doze pessoas, qual é a probabilidade de haver homens, mas no máximo dois, no grupo de quatro pessoas escolhidas?

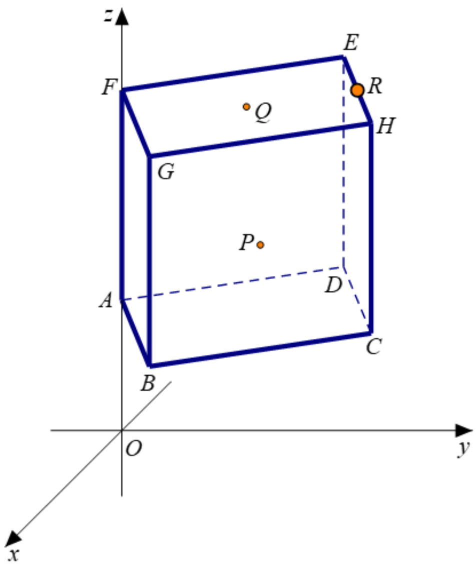
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

24.2 Pretende-se formar uma comissão com sete pessoas, sendo que essa comissão tem três cargos: presidente, vice-presidente e tesoureiro. As restantes pessoas desempenharão tarefas indiferenciadas.

Quantas comissões distintas podem ser formadas de modo que haja pelo menos uma mulher e pelo menos um homem a desempenhar os cargos?

25. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



- a aresta $[AF]$ está contida no eixo Oz;
- P é o centro da face $[BCHG]$;
- Q é o centro da face $[EFGH]$;
- R é o ponto médio da aresta $[EH]$.

Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três dos onze pontos assinalados.

Qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao plano xOy?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

26. Um grupo de amigos constituído por três de Aveiro e alguns de Viana do Castelo vai a um parque aquático. Numa dada altura do dia decidem ir todos à maior atração do parque, um escorrega com vinte metros de altura em que só pode descer uma pessoa de cada vez.

Sabe-se que se a ordem de descida dos amigos for aleatória, a probabilidade de os três de Aveiro descerem consecutivamente é $\frac{1}{51}$.

O grupo é constituído por quantas pessoas?

27. Numa empresa, sabe-se que:

- 40% dos funcionários são do sexo masculino;
- $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados;
- entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são do sexo feminino.

Escolhe-se ao acaso um funcionário desta empresa.

Qual é a probabilidade de não ser licenciado ou ser do sexo masculino?

Apresenta o resultado na forma de percentagem.

28. O João faz coleção de bolas de vários desportos.

Supõe que o João pretende colocar algumas das bolas que tem num expositor com quinze lugares, de modo que cada lugar fique ocupado por apenas uma bola.

Nesse expositor vão ser colocadas doze bolas:

- quatro bolas de futebol distintas;
- três bolas de basquetebol distintas;
- cinco bolas de ténis iguais.

Dispondo as bolas ao acaso, qual é a probabilidade de as bolas de futebol ficarem dispostas consecutivamente?

Uma expressão que dá esta probabilidade é $\dfrac{12 \times 4! \times {}^{11}C_5 \times {}^{6}A_3}{{}^{15}A_7 \times {}^{8}C_5}$.

Numa pequena composição, explica esta expressão, no contexto do problema.

Na tua resposta:

- enuncia a regra de Laplace;
- apresenta uma explicação para o número de casos possíveis;
- apresenta uma explicação para o número de casos favoráveis.

29. Num saco estão nove bolas indistinguíveis ao tato e numeradas de 1 a 9.

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente e com reposição, nove bolas do saco.

Sejam X e Y os acontecimentos:

X : «A bola com o número 4 foi extraída exatamente quatro vezes.»

Y : «Todas as bolas numeradas com números ímpares são extraídas.»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, determina o valor de $P(Y|X)$.

Começa por interpretar o significado de $P(Y|X)$ no contexto da situação descrita.

Apresenta o resultado na forma de dízima com quatro casas decimais.

30. Oito amigos, entre os quais o casal Sofia e Carlos, decidiram ir a um concerto. Quando chegaram já só havia quatro bilhetes. Decidiram, então, sortear os quatro bilhetes pelos oito amigos.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, um dos elementos do casal ir ao concerto?

A $\dfrac{{}^6C_3 + {}^6C_2}{{}^8C_4}$

B $\dfrac{{}^6C_3 + {}^6C_2 \times 2}{{}^8C_4}$

C $\dfrac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$

D $\dfrac{{}^6C_3 + {}^6C_4}{{}^8C_4}$

Funções

31. Considera que para cada k real, a seguinte expressão, definida por ramos, define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{e^{\frac{x+1}{2}} - 1} & \text{se } \ x < -1 \\ e^{kx}\left(x^2 - 4x + 1\right) & \text{se } \ x \geq -1 \end{cases}$$

31.1 Determina o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$, para o caso em que $k < 1$.

31.2 Verifica se existe algum k de modo que a função g seja contínua em $x = -1$.

31.3 Considera $k = -1$.

Estuda, para $x \in \left]-1, +\infty\right[$, a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na tua resposta deves indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

32. Sejam a e x dois números reais, com $a > 0$, tais que $\log_5 a = x$.

A expressão $\log_5\left(\dfrac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)$ é equivalente a:

A $-x^2 + \dfrac{3x}{2} - 1$

B $\dfrac{x}{2} - 1$

C $x^2 - \dfrac{3x}{2} + 1$

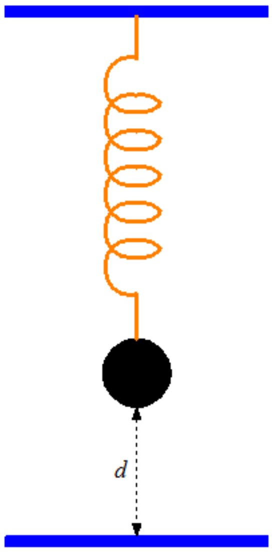
D $-\dfrac{x}{2} + 1$

33. Sejam f e g duas funções, de domínio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, respetivamente, tais que:

- f é contínua e positiva em $\mathbb{R}$;
- $f(0)=f(1)=3$ e $f(3)<1$;
- $g(x)=\log_3 x$.

Mostra que a equação $(g\circ f)(x)=(f\times g)(x)$ é possível no intervalo $]1,3[$.

34. Na figura, está representada uma esfera suspensa numa mola que oscila verticalmente.



Admite que a distância, em centímetros, a que a esfera se encontra do solo, t segundos após o início do movimento oscilatório, é dada pela função d, definida por:

$$d(t)=3+3,5e^{-0,31t}\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi t}{3}\right), \text{ com } t\geq 0$$

34.1 Admite que, no início do movimento, a distância do centro da esfera ao solo é de $3,5$ cm.

Qual é, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera?

A $\frac{\pi}{6}$ **B** $\frac{\pi}{4}$ **C** $\frac{\pi}{3}$ **D** $\frac{\pi}{2}$

34.2 Durante o terceiro segundo de movimento, existem exatamente dois instantes tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15%.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determina esse instante.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerares necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s), com três casas decimais;
- apresentar os instantes pedidos, em segundos, arredondado às décimas.

35. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2 \ln x - 2$.

35.1 Determina o conjunto-solução da equação $f(x) + x^2 = 2\ln x$.

35.2 Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta deves:

- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo;
- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

36. Considera a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \cos^2(2x) - 2$.

36.1 Apenas um dos valores seguintes é período da função h. Qual?

A $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{3}$

D $\frac{\pi}{2}$

36.2 Mostra que a função h não tem zeros.

36.3 Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3}$.

37. Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da equação:

$$\log_4(x+3) = \log_4(6-2x) - \log_2\left(\sqrt{x}\right)$$

Apresenta o conjunto na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

38. Para um certo valor real de $k > -1$, a função g, de domínio $[-1, +\infty[$, é contínua.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^{x-k} - k}{\operatorname{sen}(k-x)} & \text{se} \quad -1 \leq x < k \\ \\ x & \text{se} \quad x \geq k \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

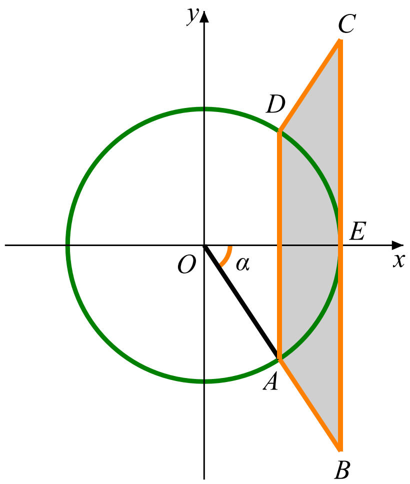
39. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, respetivamente, tais que:

- f é contínua e derivável em $\mathbb{R}$;
- a função f tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1;
- $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2} & \text{se} \quad x<0\\[2mm] \dfrac{2x+f(x)}{x+2} & \text{se} \quad x>0\end{cases}$;
- existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

39.1 Qual é o valor de $f(0)$?

39.2 Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

40. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência trigonométrica e ao eixo Ox;
- os pontos A e D pertencem à circunferência trigonométrica e são simétricos em relação ao eixo Ox;
- a reta BC é tangente à circunferência trigonométrica no ponto E;
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox e o ponto B pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo EOA, com $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$.

40.1 Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função, de α por $-\text{sen}^2\,\alpha \times \text{tg}\,\alpha$.

40.2 Determina a área do trapézio, no caso em que $\cos(\alpha+\pi)=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

41. Considera a função g, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x)=\cos x$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $g(\alpha)=-\frac{1}{3}$.

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $g(\beta)=\frac{1}{3}$.

Das opções seguintes, qual pode ser igual a β ?

A $\frac{\pi}{2}+\alpha$ **B** $\pi+\alpha$ **C** $2\pi-\alpha$ **D** $2\pi+\alpha$

42. Considera as seguintes afirmações acerca da função tangente.

I. A função tangente é crescente em todo o seu domínio.

II. 2π é período da função tangente.

Em relação ao valor lógico das afirmações, qual das seguintes opções é a correta?

A São ambas falsas.

B I é verdadeira e a II é falsa.

C I é falsa e II é verdadeira.

D São ambas verdadeiras.

43. Um ponto P descola-se sobre uma reta numérica de tal forma que a sua abcissa x é dada em função de t, em minutos, por $x(t)=4\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, com $t \geq 0$.

43.1 Qual é o período positivo mínimo da função x? Interpreta o resultado no contexto do problema.

43.2 Qual é a distância mínima do ponto P à origem da reta numérica?

43.3 Nos primeiros vinte segundos do movimento, houve um instante t_0 tal que passado o mesmo tempo que decorreu até esse instante t_0, a abcissa do ponto P aumentou três unidades.

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o instante t_0.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema;

- representar, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinalar o(s) ponto(s) relevante(s), que te permitam resolver a equação;

- apresentar o instante t_0, em minutos, arredondado às centésimas;

44. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n-k}{n+k}\right)^{\frac{n}{3}}$, com $k \in \mathbb{R}^+$ e a função f, definida em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \ln x$.

Sabendo que $\lim f(u_n) = 1 - k$, qual é o valor de k ?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

45. Sejam f e g duas funções diferenciáveis de domínio $\mathbb{R}$, relativamente às quais se sabe que:

- a reta de equação $y + 3 = 2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = 0$;
- 1 é o mínimo absoluto de f';
- $g(x) = e^{x-2}(f(x) + 1)$.

Considera as seguintes afirmações.

(I) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$.

(II) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$.

(III) O gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$.

Justifica que as três afirmações são falsas.

Na tua resposta, apresenta, para cada uma das afirmações, uma razão que justifica a sua falsidade.

Números Complexos

46. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$ a soma de três das raízes quartas de um certo número complexo z.

Então, z é igual a:

A $2\sqrt{3} + 2i$

B $2\sqrt{3} - 2i$

C $2 + 2\sqrt{3}i$

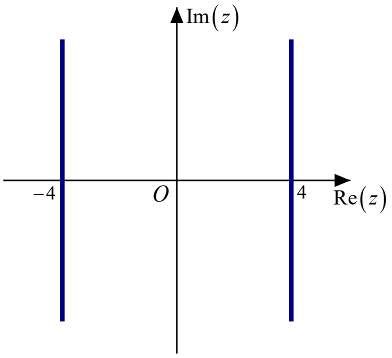
D $2 - 2\sqrt{3}i$

47. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera a condição:

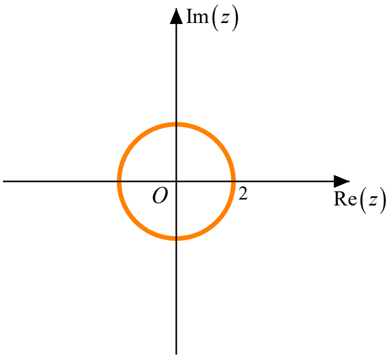
$$\left(z+\overline{z}\right)^2-\left(z-\overline{z}\right)^2=16$$

Em qual das figuras pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

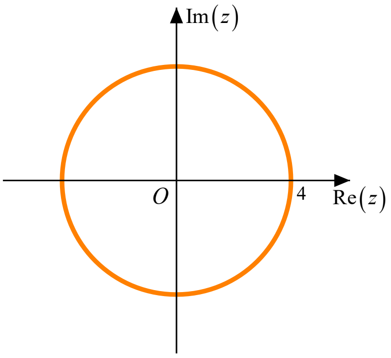
A



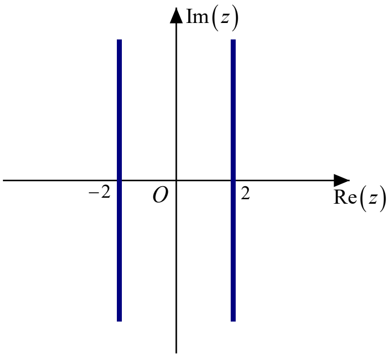
C



B



D



48. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1=1-2i$ e w_2 tal que $\left(w_1\right)^2\times\overline{w_2}$ pertence ao conjunto $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)=0\ \wedge\ \operatorname{Im}(z)>0\right\}$.

Mostra que o afixo de w_2 pertence ao segundo quadrante.

49. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos z_1 e z_2 tais que:

- $z_1=e^{i\frac{13\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}$
- $z_2=2i^{110}-\sqrt{12}\,i^{33}$

Determina o número complexo z_3, na forma algébrica, sabendo que o número complexo $\dfrac{z_1\times\overline{z_2}}{z_3}$ satisfaz a condição $|z|=\sqrt{2}\ \wedge\ \operatorname{Re}(z)=0\ \wedge\ \operatorname{Im}(z)>0$.

50. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = re^{i\alpha}$, com $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ e $r > 0$.

50.1 Admita que $(z_2)^3$ é um número real negativo e que o seu afixo pertence à circunferência de raio 8 centrada na origem.

Em qual das seguintes opções está a representação algébrica de z_2?

A $-1 + \sqrt{3}i$

B $1 + \sqrt{3}i$

C $\sqrt{3} + i$

D $\sqrt{3} + 3i$

50.2 Admite agora que o afixo de z_2 tem as coordenadas simétricas e que $\left|z_2(1-i)\right| = 1$.

Escreve na forma trigonométrica o número complexo $(z_2)^3 + \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

51. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números $z_1 = \frac{4+2i}{1-i} + 2i^{2022}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

51.1 Os afixos das soluções da equação $z^2 - z_2\,\overline{z} = 0$ definem um polígono.

Determina, em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, as soluções da equação na forma algébrica e determina a área do polígono.

51.2 Determina α, com $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, de modo que o afixo do número complexo $\frac{z_1 - z_2}{(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)^5}$ pertença à bissetriz do primeiro quadrante.

52. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

O afixo do número complexo $\overline{z}^3$ pertence:

A à bissetriz do primeiro quadrante.

B à bissetriz do quarto quadrante.

C ao eixo real.

D ao eixo imaginário.

53. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z=-\frac{4e^{i\alpha}(2-i)}{1+2i}$, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Sabe-se que z e $-2\sqrt{3}+2i$ são raízes quartas de um mesmo número complexo.

Determina α.

54. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $z=e^{i\frac{\pi}{12}}$ e $w=\left(\frac{1}{z}+\overline{z}\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right)$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o menor valor de n, número natural, de modo que w^n seja um número real negativo.

FIM