

Avaliação – Itens para testes de avaliação

Matemática A | 11.º Ano

Tópicos: Funções cúbicas e quárticas, operações com funções e funções racionais.



Cálculo diferencial

Funções cúbicas e quárticas, operações com funções e funções racionais.

1. Seja f uma função cúbica definida por uma expressão da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, tal que quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

A $d > 0$

B $a < 0$

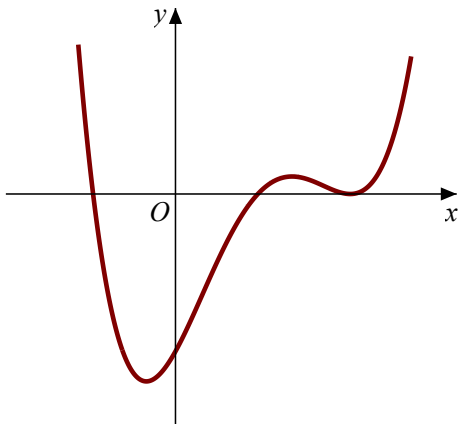
C $d < 0$

D $a > 0$

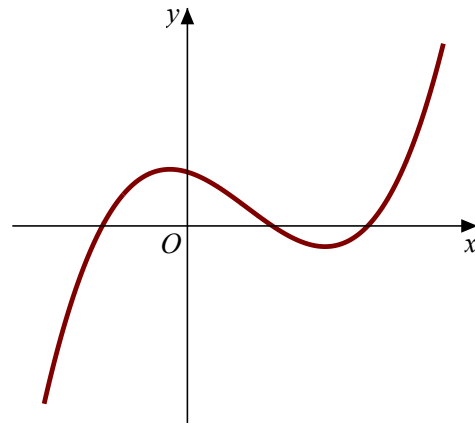
2. Considera uma função polinomial h definida por $h(x) = a(x+a)^2(x^2-b)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}^+$.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico de h ?

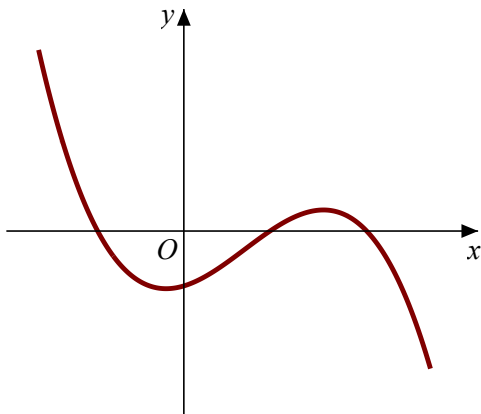
A



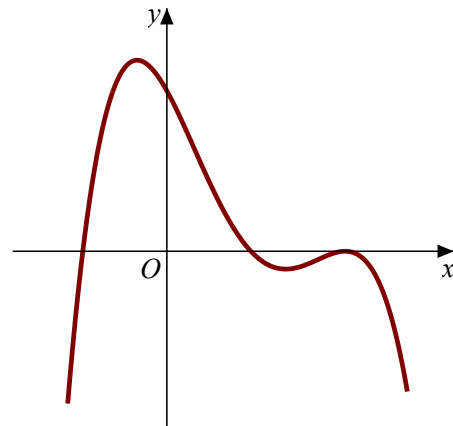
C



B



D



3. Considera a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = ax^3 + ax^2 + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sabe-se que $g(0) = 0$ e que $g(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$.

Determina os valores de x para os quais a função g é positiva.

4. Seja k um número real tal que o polinómio $A(x) = k^2x^4 - 4kx^3 + 3x - 2$ é sempre de grau 4.

Qual é o valor de k de modo que o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x - 2$ seja 4?

A 0

C 2

B 1

D 3

5. Considera a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -3x^3 + 12x^2 + 21x - 30$.

5.1 Utilizando a regra de Ruffini, determina o resto e o quociente da divisão inteira de $f(x)$ por $x + \frac{3}{2}$.

5.2 Determina $f(1)$, interpreta o resultado, e mostra que $f(x) = -3(x+2)(x-1)(x-5)$.

5.3 Determina o conjunto-solução da condição $f(x) \geq 0$.

5.4 Considera a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = (x-5)^2$.

5.4.1 Qual é o domínio da função $\frac{f}{g}$?

A \mathbb{R}

C $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 5\}$

B $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

D $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

5.4.2 Estuda a função $g + f$ quanto ao sinal.

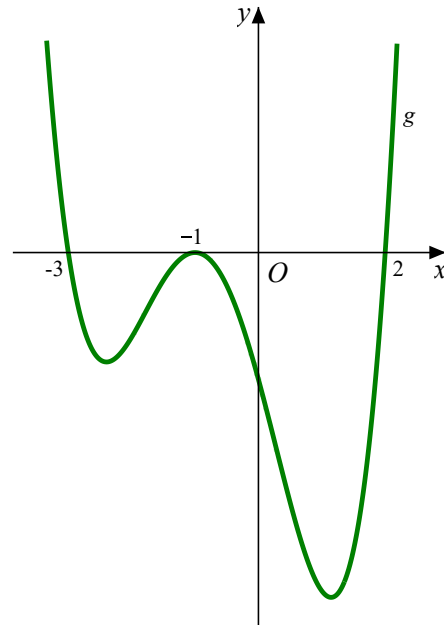
5.4.3 A função $\frac{g}{f}$ tem zeros?

Justifica.

6. Na figura, está representada, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico de uma função polinomial, g , de grau 4.

Sabe-se que:

- os únicos zeros da função g são -3 , -1 e 2 ;
- $g(-2) = -\frac{4}{3}$.



Considera, ainda a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = x - 2$.

6.1 Qual é conjunto-solução da inequação $(h \times g)(x) > 0$?

- A** $]-\infty, -3[$
- B** $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$
- C** $]-3, 2[\setminus \{-1\}$
- D** $]-3, +\infty[\setminus \{-1, 2\}$

6.2 Mostra que $g(x) = \frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 - \frac{11}{3}x - 2$.

6.3 Determina o conjunto-solução da inequação $(g - h)(x) < 0$?

6.4 Considera a função polinomial, f , tal que $(f - g)(x) = k$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, determina entre que valores deve variar k de modo que f tenha exatamente dois zeros positivos.

Na tua resposta, apresenta o(s) gráfico(s) que considerares necessários para resolver o problema e o extremo superior do intervalo arredondado às centésimas.

7. Seja h uma função polinomial de grau superior ou igual a 2, tal que:

- o gráfico de h interseca o eixo Oy no ponto de ordenada 3;
- o resto da divisão inteira de $h(x)$ por $x - 5$ é -2 .

Determina o resto da divisão inteira de $h(x)$ por $x^2 - 5x$.

8. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico de uma função f , definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

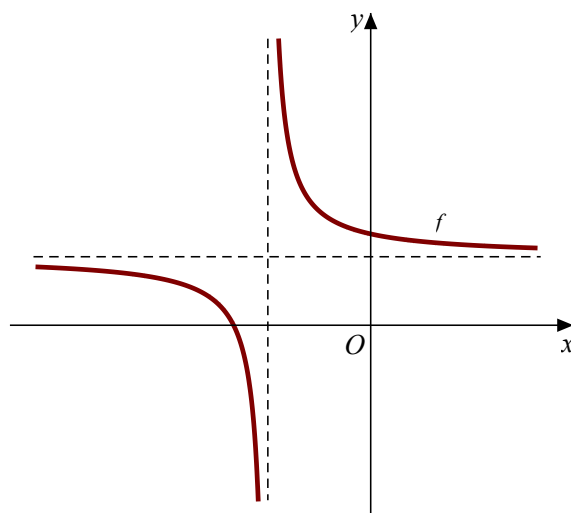
8.1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $a < 0$ e $c < 0$.

B $a < 0$ e $c > 0$.

C $a > 0$ e $c < 0$.

D $a > 0$ e $c > 0$.



8.2 Considera, agora, que o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ e que o zero de f é -4 .

Mostra que $f(x) = \frac{2x+8}{x+3}$.

9. Considera a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por $h(x) = 2 - \frac{x-4}{2x-4}$.

9.1 Determina as equações das assíntotas ao gráfico de h .

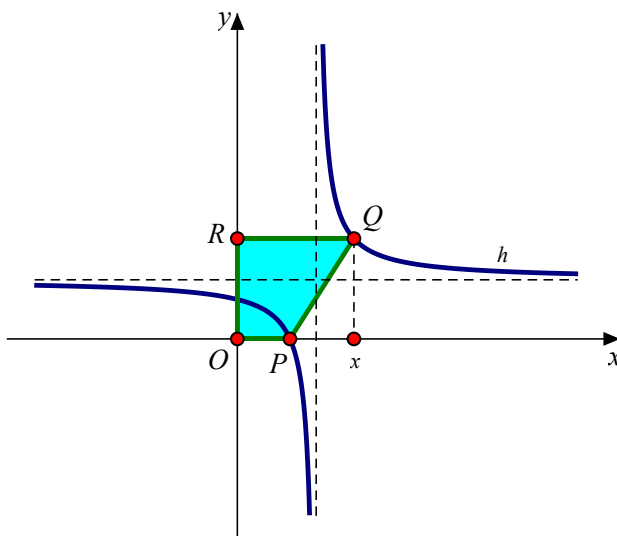
9.2 Determina o conjunto das abcissas dos pontos do gráfico de h que estão acima da reta de equação $y = x + 1$.

Apresenta o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos.

9.3 Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico da função h e o trapézio $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- a abcissa do ponto P é o zero de h ;
- o ponto R pertence ao eixo Oy ;
- o ponto Q desloca-se sobre o gráfico de h , de modo que o lado $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox .



Seja A a função que dá a área do trapézio $[OPQR]$ em função da abcissa, x , do ponto Q , com $x > 2$.

9.3.1 Mostra que $A(x) = \frac{9x^2 - 16}{12x - 24}$.

9.3.2 Existe uma abcissa do ponto Q tal que se a aumentarmos em uma unidade, a área do trapézio diminui 10%.

Recorrendo à calculadora gráfica, determina o valor dessa abcissa, arredondado às décimas.

Na tua resposta deves:

- apresentar uma equação que te permita resolver o problema;
- representar, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinalar o(s) ponto(s) relevante(s) que te permite(m) resolver a equação.

Cálculo diferencial

10. Sejam f uma função de domínio \mathbb{R} e r e s duas retas tais que:

- a reta r é secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas -2 e 3 ;
- uma equação da reta s é $3y - x = 3$;
- as retas r e s são perpendiculares.

Qual é o valor de $t.m.v._{f;[-2,3]}$?

A -3

B $-\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{3}$

D 3

11. Considera uma função g , derivável em \mathbb{R} , definida por $g(x) = x^2 + \frac{x^3}{3}$.

11.1 Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{g(x) - g(-3)}{x + 3}$

A -15

B -6

C 0

D 3

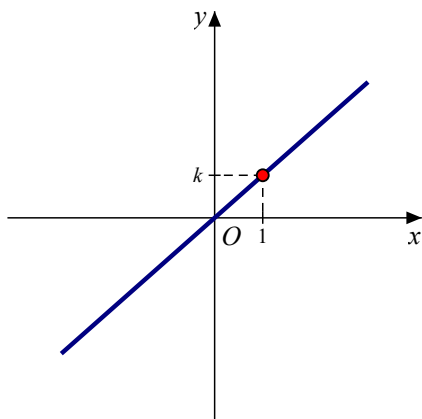
11.2 Estuda a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na tua resposta, apresenta os intervalos de monotonia e o(s) valor(es) extremo(s), caso exista(m).

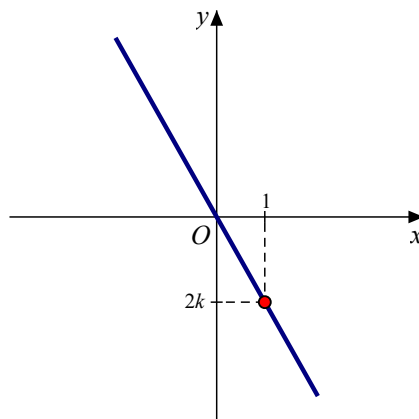
12. Considera a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = kx^2$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que o seu gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Qual dos seguintes pode ser uma representação gráfica de g' , função derivada de g ?

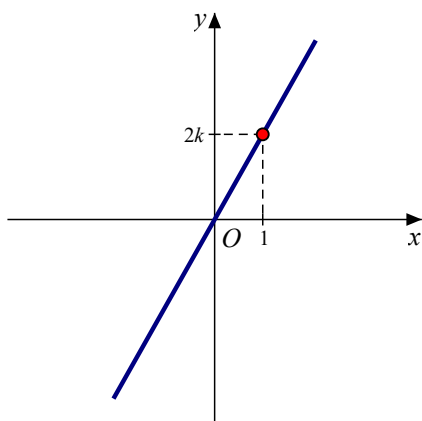
A



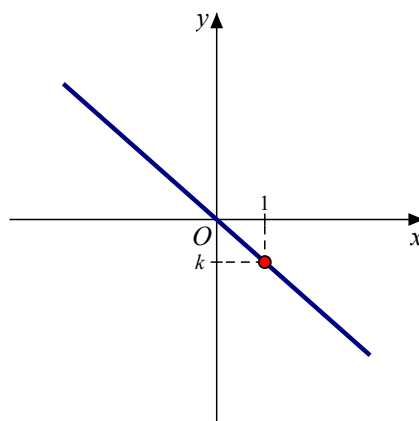
C



B



D



13. Para um certo valor real a , a função f , derivável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $f(x) = x + \frac{a}{x+1}$, tem um extremo relativo em $x = 1$.

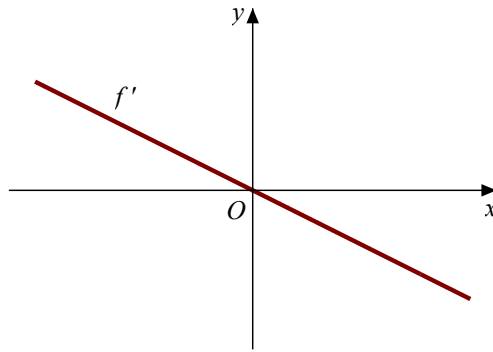
13.1 Mostra que:

13.1.1 $f'(x) = 1 - \frac{a}{(x+1)^2}$

13.1.2 $a = 4$ e que o extremo em $x = 1$ é um mínimo.

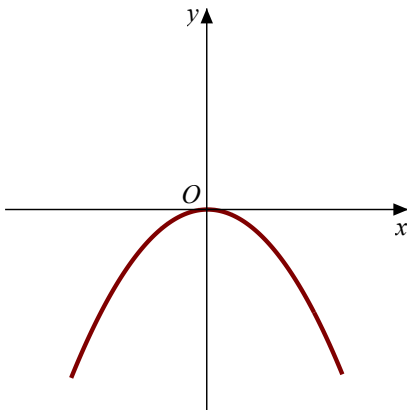
13.2 Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

14. Na figura, está representada graficamente a função f' , função derivada de uma função polinomial f .

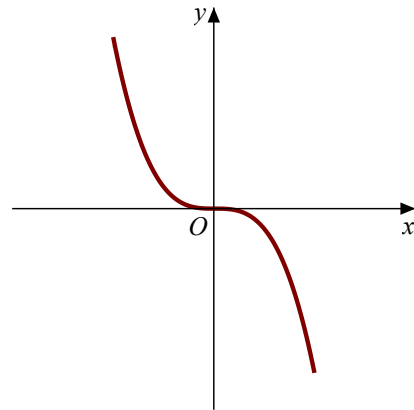


Qual dos seguintes pode ser uma representação gráfica de f ?

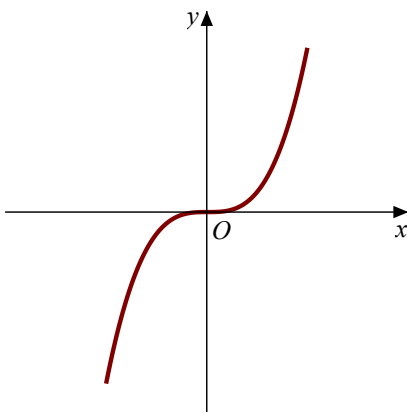
A



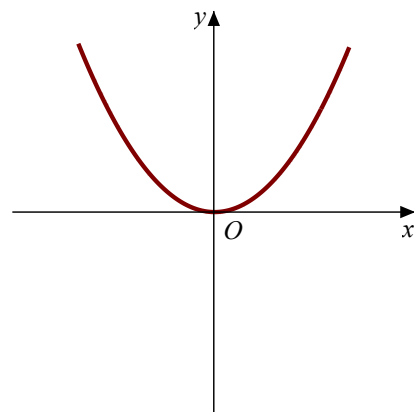
C



B



D



15. Seja g uma função derivável em \mathbb{R} tal que a reta de equação $y = 2x - 5$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 3.

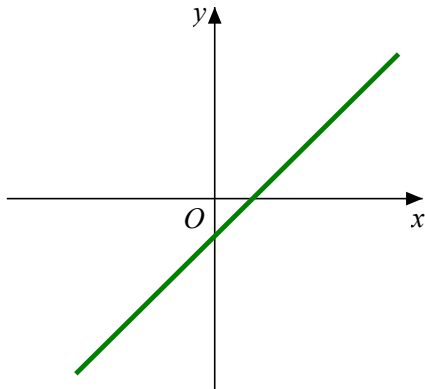
Considera a função f , também derivável em \mathbb{R} , definida por $f(x) = (2x - 3)g(x)$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3}$?

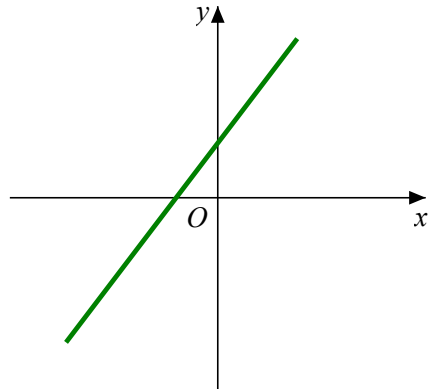
16. Considera as funções f , afim e crescente, e g , polinomial de grau 2, definida por $g(x) = x^2 - x$.

Qual dos seguintes, pode ser o gráfico da função $(f - g)'$, função derivada da função $f - g$?

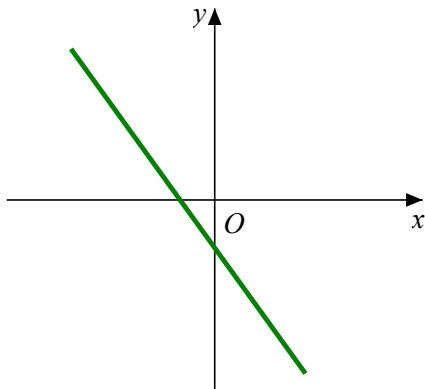
A



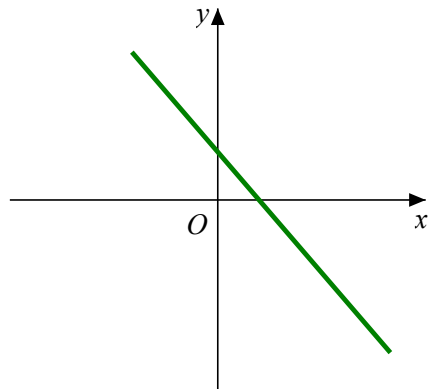
C



B



D



17. De entre todos os números reais positivos, existe um cuja soma com o dobro do seu inverso é a menor.

Determina esse número e o valor dessa soma.

Apresenta do resultado na forma $n\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

FIM