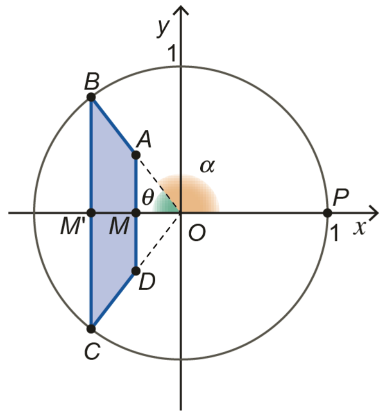
1.

1.1. Sejam M e M' os pontos médios de $[AD]$ e $[BC]$, respetivamente.



A área do trapézio é dada pela expressão $\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{MM'}$.

Como $\overline{OB}=1$, então $\overline{OA}=0,5$.

Seja $\theta=\pi-\alpha$.

$\cos\ \theta=\frac{\overline{OM}}{0,5}\Leftrightarrow\frac{\cos\theta}{2}=\overline{OM}$

$\cos\ \theta=\frac{\overline{OM'}}{1}\Leftrightarrow\cos\theta=\overline{OM'}$

Deste modo: $\overline{MM'}=\overline{OM'}-\overline{OM}=\cos\ \theta-\frac{\cos\theta}{2}=\frac{\cos\theta}{2}$

Por outro lado:

$\sin\ \theta=\frac{\overline{AM}}{0,5}\Leftrightarrow\frac{\sin\ \theta}{2}=\overline{AM}$. Então, $\overline{AD}=\sin\ \theta$.

$\overline{BM'}=\sin\theta$. Então, $\overline{BC}=2\sin\theta$.

Assim:

$\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{MM'}=\frac{\sin\theta+2\sin\theta}{2}\times\frac{\cos\theta}{2}=\frac{3\sin\theta}{2}\times\frac{\cos\theta}{2}=$

$=\frac{3}{4}\sin(\pi-\alpha)\cos\ (\pi-\alpha)=-\frac{3}{4}\sin\alpha\cos\alpha$

1.2. Seja $\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\ \pi\right[$, tal que $\tan\beta=-\sqrt{5}$.

Atendendo a que $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ e $\cos\beta\neq 0$, então $\tan^2\beta+1=\frac{1}{\cos^2\beta}$.

$\left(\sqrt{5}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow\cos^2\beta=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}\ \vee\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$

Como $\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $\cos\ \beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

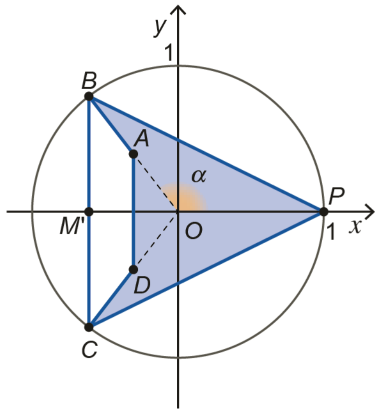
$\sin^2\beta+\frac{1}{6}=1\Leftrightarrow\sin^2\beta=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\sin\ \beta=\sqrt{\frac{5}{6}}\ \vee\ \sin\ \beta=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

Como $\beta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $\sin\beta=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

Finalmente:

$T(\beta)=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{5}}{4\times 6}=\frac{\sqrt{5}}{8}$

1.3. A área do triângulo é dada por:



$$\frac{\overline{PM'} \times \overline{BC}}{2} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha \times (1-\cos\alpha)}{2}$$

$$= \sin\alpha(1-\cos\alpha)$$

Logo, a área sombreada é dada pela diferença entre a área do triângulo e a área do trapézio:

$$\sin\alpha(1-\cos\alpha) - \left(-\frac{3}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right) =$$

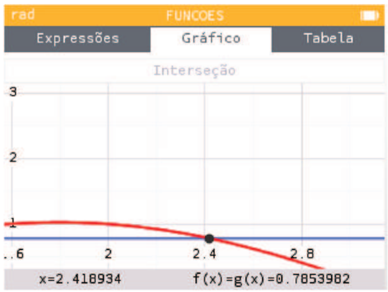
$$= \sin\alpha\left(1-\cos\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha\right)$$

$$= \sin\alpha\left(1-\frac{1}{4}\cos\alpha\right)$$

A equação pretendida será equivalente a $\sin\alpha\left(1-\frac{1}{4}\cos\alpha\right) = \frac{\pi}{4}$.

Visualizando na calculadora, o gráfico da função $f(\alpha) = \sin\alpha\left(1-\frac{1}{4}\cos\alpha\right)$ e a reta de equação

$y = \frac{\pi}{4}$, para $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, determina-se o ponto de interseção dos gráficos.



O valor de α, arredondado às centésimas, é 2,42.

1.4. Opção **(D)**

$$\pi - \frac{\pi - \frac{5}{6}\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11}{12}\pi$$

2.1. Opção **(A)**

Para $k = -1$, tem-se $P(x) = x^4 - x^3 + 4x$

$$P(-2) = (-2)^4 - (-2)^3 + 4 \times (-2) = 16$$

2.2. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$

	1	-3	0	4	0
2		2	-2	-4	0
	1	-1	-2	0	0
2		2	2	0	
	1	1	0	0	
2		2	6		
	1	3	$6 \neq 0$		

$P(x) = (x-2)^2 (x^2 + x) = x(x+1)(x-2)^2$

A raiz 2 tem multiplicidade 2.

3.

3.1. $u_4 = u_2 \times r^2 \Leftrightarrow \dfrac{u_4}{u_2} = r^2$

Por outro lado:

$u_2 = 9u_4 \Leftrightarrow \dfrac{u_4}{u_2} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{3} \vee r = -\dfrac{1}{3}$

Como (u_n) é uma progressão geométrica monótona, então $r = \dfrac{1}{3}$.

3.2. Opção **(D)**

$u_n = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{6} \times 3^{1-n} = \dfrac{1}{2} \times 3^{-1} \times 3^{1-n} = \dfrac{1}{2} \times 3^{-n}$

4.

4.1. Escolhendo os dois vértices que são extremos de uma aresta do prisma $[OABCDEFG]$, existem apenas outros dois vértices do prisma com os quais nenhum dos anteriores estão ligados por uma aresta.

O prisma tem 12 arestas. Logo, $12 \times 2 = 24$.

4.2. ${}^3A_2 \times 4! = {}^3A_2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$

N.º de maneiras de pintar as duas bases com as três cores disponíveis: ${}^3A_2$

N.º de maneiras de pintar as quatro faces laterais com as quatro cores disponíveis: $4!$

5.

5.1. Opção **(A)**

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{FB} = (2, 2, 4) \cdot (2, 0, -4) = -12$

5.2. Como o plano BCD é definido por $2y + z = 4$, pode considerar-se $\vec{n}(0,2,1)$ um vetor normal ao plano BCD.

Deste modo, o plano paralelo a BCD e que passa por E é do tipo: $2y + z + d = 0$.

Como ponto E tem coordenadas $(2,2,4)$, então: $2 \times 2 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$.

O plano pedido é definido por: $2y + z - 8 = 0$

5.3. As coordenadas dos pontos A e G são $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 4)$, respetivamente.

As coordenadas do ponto P são $(1, 0, 2)$, logo a reta perpendicular ao plano BCD e que passa no ponto P pode ser definida por $(x, y, z) = (1, 0, 2) + k(0, 2, 1),\ k \in \mathbb{R}$.

A face $[BCFE]$ é definida por $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = 2 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 4$.

As coordenadas de qualquer ponto da reta são do tipo $(x, y, z) = (1, 2k, 2 + k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Como o plano que contém a face $[BCFE]$ pode ser definido por $y = 2$, então $2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$.

O ponto Q pertence à face $[BCFE]$ e tem coordenadas $(1, 2, 3)$.

6.

6.1. A altura do prisma pode ser determinada pela divisão de $V(x)$ por $(x+2)^2$:

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 13x^2 + 28x + 20 & x^2 + 4x + 4 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 8x^2 - 8x & 2x + 5 \\ \cline{1-1} 5x^2 + 20x + 20 & \\ -5x^2 - 20x - 20 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

A altura do prisma é definida pela expressão $2x + 5$.

6.2. Opção **(B)**

A área total do prisma é dada pela expressão:

$2(x+2)^2 + 4(x+2)(2x+5) =$

$= 2x^2 + 8x + 8 + 8x^2 + 36x + 40$

$= 10x^2 + 44x + 48$

Assim:

$10x^2 + 44x + 48 = 270 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 44x - 222 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\dfrac{37}{5}$

Como $x > -2$, conclui-se que $x = 3$.

7.

7.1. As coordenadas do ponto A, vértice da parábola, são $(-0{,}5;\ 4{,}5)$

$2 \times (-0{,}5) - a = 0 \Leftrightarrow -1 - a = 0 \Leftrightarrow a = -1$

$b = 4{,}5 = \dfrac{9}{2}$

7.2. **a)** O ponto P tem ordenada $\dfrac{5}{2}$ e pertence à reta *r*. Então, $\dfrac{5}{2} = -2x - \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{5}{2} = -2x - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 5 = -4x - 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

A abcissa de P é igual a $-\dfrac{3}{2}$.

b) O declive da reta r é igual a -2.

A abcissa do ponto Q é igual a 0, sendo o declive da reta *s* dado por $f'(0)$.

$f(x) = -2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} = -2\left(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{9}{2} = -2x^2 - 2x + 4$

$f'(x) = \left(-2x^2 - 2x + 4\right)' = -4x - 2$

Então, $f'(0) = -2$.

Como as retas *r* e *s* têm igual declive, conclui-se que são paralelas.