

Teste N.º 5

**Matemática A**

---

---

**12.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

---

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

### Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

1. Numa competição de xadrez, cada equipa participante recebe um código de identificação digital constituído por quatro algarismos, de 0 a 9. Admita que cada um desses códigos é atribuído ao acaso. Determine a probabilidade de o código atribuído, simultaneamente:

- representar um número compreendido entre 1000 e 5000;
- ter os quatro algarismos diferentes;
- conter o algarismo 0;
- conter exatamente dois algarismos ímpares.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

2. O gráfico de uma função  $f$  admite, quando  $x \rightarrow +\infty$ , a reta de equação  $2x - y - 5 = 0$  como assíntota oblíqua. Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 2xf(x)}{x}$ ?

- (A) -10                      (B) -5                      (C) 5                      (D) 10

3. Considere a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2^{2k} + 2^{k+1} - 5 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2 - 4}{e^{-x} + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde  $k$  é um número real.

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Determine, caso exista, o valor de  $k$  para o qual a função  $h$  é contínua em  $x = 0$ .

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas por:

$$f(x) = x + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = \ln(x + 1)$$

$f$  tem domínio  $\mathbb{R}$  e  $g$  tem domínio  $]-1, +\infty[$ .

Seja  $a$  um número real positivo tal que  $\ln(a + 1) < a - 2$ .

Mostre que a equação  $(f \circ g)(x) = x$  é possível no intervalo  $]0, a[$ .

5. Seja  $f$  a função real de variável real, de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por:

$$f(x) = x \ln(x) - \frac{x}{2}$$

e seja  $r$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1.

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção da reta  $r$  com os eixos coordenados.

Qual das seguintes opções apresenta o valor da área do triângulo  $[OAB]$ ?

- (A) 4                      (B) 2                      (C) 1                      (D)  $\frac{1}{2}$

6. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^-$ , definida por:

$$f(x) = x^2 \ln(-x)$$

Sem recorrer à calculadora, estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $f$ , caso este(s) exista(m).

7. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, ambas de domínio  $\mathbb{R}$  e duas vezes diferenciáveis, e seja  $f'$  a função derivada de  $f$ .

Sabe-se que:

- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ;
- a função  $f'$  tem exatamente dois zeros,  $x = 2$  e  $x = 6$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 6x) = 1$ ;
- a função  $g'$  é definida por  $g'(x) = f(x) - x^2$ .

Considere as proposições seguintes.

I. A função  $f$  tem dois extremos, em  $x = 2$  e em  $x = 6$ .

II. A reta de equação  $y = -6x + 2$  é paralela à assíntota ao gráfico de  $f$ , para  $x \rightarrow -\infty$ .

III. O gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio.

Justifique que as proposições I, II e III são falsas.

8. Sejam  $p$  e  $q$  dois números reais e sejam:

$$z_1 = (3p - 1) + (2q + 3)i \quad \text{e} \quad z_2 = (3q + 2) + (p - 7)i$$

dois números complexos tais que  $z_1 = \overline{z_2}$ .

Qual é o valor de  $p + q$ ?

(A) -3

(B) -1

(C) 1

(D) 3

9. Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, os números:

$$z_1 = 2i^9 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{4i}{1+i}$$

Seja  $w = \sqrt{2} k e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)}$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

Determine o valor de  $k$  para o qual o afixo de  $w$  é equidistante do afixo de  $z_1$  e do afixo de  $z_2$ .

10. Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos,  $z_1 = 3 + 4i$  e  $z_2 = 4 + 3i$ .

Seja  $w = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_2 - z_1}$ .

No plano complexo, a condição  $|z| = |w| \wedge \text{Im}(z) \geq 0 \wedge \text{Re}(z) \geq 0$  define uma linha.

Qual é o comprimento dessa linha?

- (A)  $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$                       (B)  $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$                       (C)  $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$                       (D)  $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número complexo:

$$z = \frac{3ai^{10}}{1-i} + 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que  $\text{Im}(z) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Re}(z) = 0$ .

Determine  $z$  na forma trigonométrica.

12. Seja  $w$  um número complexo de argumento  $\theta$ , com  $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

12.1 Qual das expressões seguintes é um argumento de  $\frac{i^{15} \bar{w}^2}{w}$  ?

- (A)  $-\theta - \frac{\pi}{2}$                       (B)  $-3\theta + \frac{\pi}{2}$                       (C)  $-3\theta - \frac{\pi}{2}$                       (D)  $-\theta + \frac{\pi}{2}$

12.2 Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Sabe-se que o número complexo  $w$  é uma das soluções da equação:

$$(1+i)z^3 - 16e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 0$$

Determine  $w$ .

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

**FIM**

**COTAÇÕES**

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.1	12.2	TOTAL
18	10	18	18	10	20	20	10	18	10	20	10	18	<b>200</b>

## TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

### 1. Número de casos possíveis: $10^4$

Nas condições do enunciado, como se pretende que o código de identificação digital represente um número compreendido entre 1000 e 5000, então o primeiro algarismo só pode ser 1, 2, 3 ou 4. Além disso, o número deve conter o algarismo 0, ter exatamente dois algarismos ímpares e ter todos os algarismos distintos. Desta forma, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: o primeiro algarismo ser ímpar ou ser par.

#### 1.ª alternativa

O primeiro algarismo pode ser 1 ou 3, logo há duas possibilidades. Para cada uma destas, existem quatro possibilidades na escolha do segundo algarismo ímpar e, para cada uma destas, existem quatro opções na escolha do algarismo par não nulo.

Para cada uma das formas de escolher os quatro algarismos que irão constituir a identificação digital, existem  $3!$  formas distintas dos seus três últimos algarismos permutarem entre si.

Assim, para esta alternativa, existem  $2 \times 4 \times 4 \times 3! = 192$  maneiras.

#### 2.ª alternativa

O primeiro algarismo pode ser 2 ou 4, logo há duas possibilidades. Para cada uma destas, existem  ${}^5C_2$  formas distintas de escolher dois algarismos ímpares, de entre os cinco existentes.

Para cada uma das formas de escolher os quatro algarismos que irão constituir a identificação digital, existem  $3!$  formas distintas de os seus três últimos algarismos permutarem entre si. Assim,

para esta alternativa, existem  $2 \times {}^5C_2 \times 3! = 120$ . Desta forma, o número de casos favoráveis é  $192 + 120 = 312$ . Logo, a probabilidade pedida é  $\frac{312}{10^4} = \frac{39}{1250} = 0,0312$ , ou seja, 3,12%.

### 2. Opção (A)

$$2x - y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

Como a reta de equação  $y = 2x - 5$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 5)) = 0$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -5.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 2xf(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)(f(x) - 2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \\ &= 2 \times (-5) = \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 2xf(x)}{x} = -10.$$

3.  $h$  é contínua em  $x = 0$  se:

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2\operatorname{sen} x}{x} = \\ &= -2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}} = \\ &= -2 \times 1 = \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4}{e^{-x} + 1} = \frac{-4}{1 + 1} = -2$$

Assim,  $h$  é contínua em  $x = 0$  se  $h(0) = -2$ .

Desta forma:

$$\begin{aligned} 2^{2k} + 2^{k+1} - 5 = -2 &\Leftrightarrow 2^{2k} + 2 \times 2^k - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow 2^k = \frac{-2 \pm 4}{2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{2^k = -3}_{\substack{\text{equação impossível} \\ \text{em } \mathbb{R}}} \vee 2^k = 1 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \end{aligned}$$

A função  $h$  é contínua em  $x = 0$  para  $k = 0$ .

4.  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(x + 1) + 2$

$$(f \circ g)(x) = x \Leftrightarrow \ln(x + 1) + 2 = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(x + 1) + 2 - x = 0$$

Seja  $h$  a função definida por  $h(x) = \ln(x + 1) + 2 - x$ .

$h$  é contínua em  $[0, a]$ , por se tratar de operações sucessivas entre funções contínuas.

$$h(0) = \ln(0 + 1) + 2 - 0 = 2$$

$$h(a) = \ln(a + 1) + 2 - a < 0$$

$$h(a) < 0 < h(0)$$

**Cálculo auxiliar**

$$\ln(a + 1) < a - 2 \Leftrightarrow \ln(a + 1) + 2 - a < 0$$

Assim, pelo teorema de Bolzano–Cauchy:

$$\exists c \in ]0, a[ : h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in ]0, a[ : \ln(c + 1) + 2 - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in ]0, a[ : \ln(c + 1) + 2 = c$$

Demonstra-se, assim, que a equação  $(f \circ g)(x) = x$  é possível no intervalo  $]0, a[$ .

## 5. Opção (C)

Em  $]0, +\infty[$ :

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{2} = \ln x + \frac{1}{2}$$

Começemos por determinar o declive da reta  $r$ :

$$f'(1) = \ln 1 + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A equação reduzida da reta  $r$  é da forma  $y = \frac{1}{2}x + b$ .

Determinemos, agora, a ordenada do ponto de tangência:

$$f(1) = 1 \times \ln 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação reduzida da reta  $r$ , obtemos:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Logo,  $y = \frac{1}{2}x - 1$  é a equação reduzida da reta  $r$ .

Esta reta interseca o eixo das ordenadas no ponto de ordenada  $-1$ .

Determinemos a interseção da reta  $r$  com o eixo das abcissas:

$$\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, a área do triângulo  $[OAB]$  é  $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ .

## 6. Em $\mathbb{R}^-$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \ln(-x))' = \\ &= 2x \ln(-x) + x^2 \times \frac{-1}{-x} \end{aligned}$$

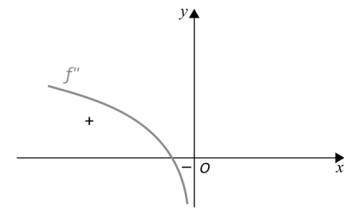
Assim,  $f'(x) = 2x \ln(-x) + x$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \ln(-x) + x)' = \\ &= 2 \ln(-x) + 2x \times \frac{-1}{-x} + 1 \end{aligned}$$

Assim,  $f''(x) = 2 \ln(-x) + 3$ .

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \ln(-x) + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \ln(-x) = -3 \\ &\Leftrightarrow \ln(-x) = -\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow -x = e^{-\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = -e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$-e^{-\frac{3}{2}}$		$0$
<b>Sinal de <math>f''</math></b>	$+$	$0$	$-$	n.d.
<b>Sentido das concavidades do gráfico de <math>f</math></b>	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.



O gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, -e^{-\frac{3}{2}}]$  e a concavidade voltada para baixo em  $[-e^{-\frac{3}{2}}, 0[$ . Apresenta ponto de inflexão de abcissa  $-e^{-\frac{3}{2}}$ .

## 7.

I.  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$  e a função  $f'$  tem exatamente dois zeros,  $x = 2$  e  $x = 6$ .

Organizando estas duas informações numa tabela de sinal, tem-se que:

$x$	$-\infty$	$2$		$6$	$+\infty$
<b>Sinal de <math>f'</math></b>	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$
<b>Variação de <math>f</math></b>	$\nearrow$	Máx	$\searrow$		$\searrow$

Isto permite-nos concluir que a afirmação I é falsa, pois a função não apresenta extremo em  $x = 6$ .

II.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 6x) = 1$ . Logo, a reta de equação  $y = 6x + 1$  é assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  para  $x \rightarrow -\infty$  e o seu declive é 6.

Assim, não poderá ser paralela à reta de equação  $y = -6x + 2$ , pois o declive desta reta é  $-6$ , pelo que a afirmação II também é falsa.

III.  $g'(x) = f(x) - x^2$ , pelo que  $g''(x) = f'(x) - 2x$ .

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow -2x \leq -4$$

Em  $[2, +\infty[$ :

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x \leq -4 \Leftrightarrow g''(x) \leq -4$$

Como em  $[2, +\infty[$  o sinal de  $g''$  é negativo, podemos garantir que o gráfico de  $g$  não tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio, e, portanto, a afirmação III é falsa.

## 8. Opção (D)

$$\bar{z}_2 = (3q + 2) - (p - 7)i$$

$$z_1 = \bar{z}_2 \Leftrightarrow (3p - 1) + (2q + 3)i = (3q + 2) - (p - 7)i$$

$$\Leftrightarrow 3p - 1 = 3q + 2 \wedge 2q + 3 = -(p - 7)$$

$$\Leftrightarrow 3p = 3q + 3 \wedge 2q + 3 = -p + 7$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p &= q + 1 \wedge p = -2q + 4 \\ \Leftrightarrow -2q + 4 &= q + 1 \wedge p = -2q + 4 \\ \Leftrightarrow 3q &= 3 \wedge p = -2q + 4 \\ \Leftrightarrow q &= 1 \wedge p = -2 \times 1 + 4 \\ \Leftrightarrow q &= 1 \wedge p = 2 \end{aligned}$$

$$p + q = 2 + 1 = 3$$

O valor de  $p + q$  é 3.

9. Pretende-se determinar o valor de  $k$ , para o qual o afixo de  $w$  é equidistante do afixo de  $z_1$  e do afixo de  $z_2$ , ou seja, que verifique a condição  $|w - z_1| = |w - z_2|$ .

$$z_1 = 2i^9 = 2i^{2 \times 4 + 1} = 2i$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{4i}{1+i} = \frac{4i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \\ &= \frac{4i-4i^2}{1^2+1^2} = \\ &= \frac{4+4i}{2} = \\ &= 2 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2} k e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} k \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \\ &= \sqrt{2} k \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= k - ki \end{aligned}$$

$$w - z_1 = k - ki - 2i = k - (k + 2)i$$

$$|w - z_1| = \sqrt{k^2 + (-(k + 2))^2} = \sqrt{k^2 + (k + 2)^2}$$

$$w - z_2 = k - ki - (2 + 2i) = (k - 2) - (k + 2)i$$

$$|w - z_2| = \sqrt{(k - 2)^2 + (-(k + 2))^2} = \sqrt{(k - 2)^2 + (k + 2)^2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} |w - z_1| = |w - z_2| &\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (k + 2)^2} = \sqrt{(k - 2)^2 + (k + 2)^2} \\ &\Leftrightarrow k^2 + (k + 2)^2 = (k - 2)^2 + (k + 2)^2 \\ &\Leftrightarrow k^2 = (k - 2)^2 \\ &\Leftrightarrow k^2 = k^2 - 4k + 4 \\ &\Leftrightarrow 4k = 4 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

O valor de  $k$  para o qual o afixo de  $w$  é equidistante dos afixos de  $z_1$  e de  $z_2$  é 1.

## 10. Opção (B)

$$\begin{aligned}w &= \frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_2 - z_1} = \frac{2 + 3i}{4 + 3i - (3 + 4i)} = \\&= \frac{6}{1 - i} = \\&= \frac{6(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \\&= \frac{6+6i}{(-1)^2 - i^2} = \\&= 3 + 3i\end{aligned}$$

$$|w| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

No plano complexo, a condição  $|z| = 3\sqrt{2} \wedge \text{Im } z \geq 0 \wedge \text{Re } z \geq 0$  define um quarto de circunferência de comprimento  $\frac{2\pi \times 3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ .

$$\begin{aligned}11. \frac{3ai^{10}}{1-i} &= \frac{3ai^{2 \times 4 + 2}}{1-i} = \frac{3ai^2}{1-i} = \\&= \frac{-3a}{1-i} = \\&= \frac{-3a \times (1+i)}{(1-i) \times (1+i)} = \\&= \frac{-3a - 3ai}{1^2 - i^2} = \\&= -\frac{3a}{2} - \frac{3a}{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\&= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\&= -1 + \sqrt{3}i\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } z = -\frac{3a}{2} - \frac{3a}{2}i + (-1 + \sqrt{3}i) = \left(-\frac{3a}{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3a}{2}\right)i.$$

$$\text{Logo, } \text{Re}(z) = -\frac{3a}{2} - 1 \text{ e } \text{Im}(z) = \sqrt{3} - \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Sabe-se que } \text{Im}(z) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Re}(z) = 0, \text{ ou seja, } \text{Im}(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Re}(z).$$

Assim:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} - \frac{3a}{2} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{3a}{2} - 1\right) \Leftrightarrow 3 - \frac{3\sqrt{3}a}{2} = \frac{3a}{2} + 1 \\&\Leftrightarrow \frac{3a}{2}(\sqrt{3} + 1) = 2 \\&\Leftrightarrow 3a(\sqrt{3} + 1) = 4 \\&\Leftrightarrow a = \frac{4}{3(\sqrt{3} + 1)} \\&\Leftrightarrow a = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{3(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3(3-1)}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$$

Substituindo o valor de  $a$  obtido em  $\left(-\frac{3a}{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3a}{2}\right) i$ , temos que:

$$z = \left(-\frac{3 \times \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}}{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3 \times \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}}{2}\right) i$$

Simplificando a expressão:

$$\begin{aligned} z &= \left(-(\sqrt{3}-1) - 1\right) + \left(\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1)\right) i = \\ &= \left(-\sqrt{3} + 1 - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1\right) i = \\ &= -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

Seja  $\alpha$  um argumento de  $z$ :

$\operatorname{Re}(z) < 0$  e  $\operatorname{Im}(z) > 0$ , logo,  $\alpha$  é um ângulo pertencente ao 2.º quadrante.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \text{ por exemplo.}$$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Assim, } z = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}.$$

## 12.

### 12.1 Opção (C)

Pretende-se determinar um argumento de  $\frac{i^{15} \bar{w}^2}{w}$ .

Como  $\theta$  é um argumento de  $w$ , então  $-\theta$  é um argumento de  $\bar{w}$  e, assim,  $-2\theta$  é um argumento de  $\bar{w}^2$ .

$$\text{Além disso, } i^{15} = i^{3 \times 4 + 3} = i^3 = i^3 = -i.$$

$$\text{Assim, um argumento de } i^{15} \text{ é } -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Desta forma, um argumento de } \frac{i^{15} \bar{w}^2}{w} \text{ é } -\frac{\pi}{2} + (-2\theta) - \theta = -3\theta - \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{12.2} \quad (1+i)z^3 - 16e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 0 \Leftrightarrow (1+i)z^3 = 16e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{16e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{1+i}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{16e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{16}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 8\sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

#### Cálculos auxiliares

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja  $\alpha$  um argumento de  $1 + i$ :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \text{ e } \operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right\} \alpha \text{ é um ângulo pertencente ao } 1.^\circ \text{ quadrante}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ por exemplo.}$$

$$\text{Assim, } 1 + i = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

As raízes cúbicas de  $8\sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$  são dadas por  $z_k = \sqrt[3]{8\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)}$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ , ou seja, por

$$z_k = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}.$$

Assim:

- Para  $k = 0$ :  $z_0 = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$
- Para  $k = 1$ :  $z_1 = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$
- Para  $k = 2$ :  $z_2 = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

Como  $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ , a única solução possível é  $w = 2\sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ .