Teste de Matemática A

2025 / 2026

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

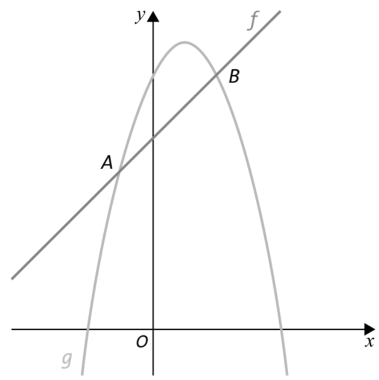
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Domínio[10] | Daniela Raposo e Luzia Gomes
Com a colaboração de Daniela Breda

1. Na figura encontram-se representadas, num referencial o.n. Oxy, uma função afim f e uma função quadrática g.

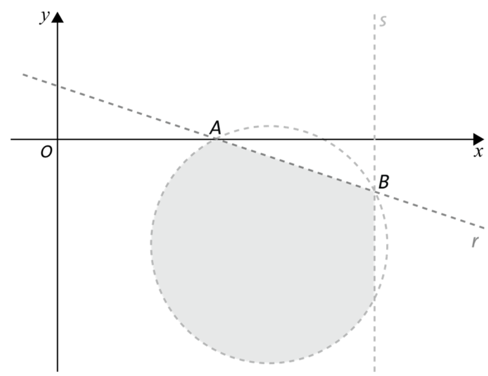


Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = x + 6$;
- a função g tem máximo absoluto em $x = 1$;
- o contradomínio da função g é o intervalo $]-\infty, 9]$;
- o gráfico da função g interseta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 8;
- A e B são os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g;
- a abcissa do ponto A é menor que a abcissa do ponto B.

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos A e B.

2. Considere, no referencial o.n. Oxy, representado na figura:



- a circunferência C definida pela equação:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5$$

- a reta s definida pela equação $x = 6$;
- o ponto A, ponto de interseção da circunferência C com o semieixo positivo Ox, de menor abcissa;
- o ponto B, ponto de interseção da circunferência C com a reta s, de maior ordenada;
- a reta r que passa pelos pontos A e B.

Escreva uma condição que defina a região colorida.

3. Considere as funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

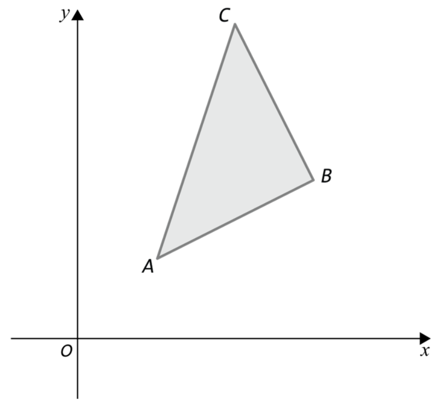
$$f(x) = x^2 - 5x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = ax - 15, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Quais são os valores de a para os quais os gráficos das funções f e g se intersetam num único ponto?

(A) -13 e -3 **(B)** 13 e -3 **(C)** -13 e 3 **(D)** 13 e 3

4. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o triângulo $[ABC]$, retângulo em B.

Os pontos A, B e C têm coordenadas, respetivamente, $(2,2)$, $(6,4)$ e $(4,8)$.



4.1 Qual das seguintes opções apresenta uma equação vetorial da mediatriz do segmento de reta $[AB]$?

(A) $(x,y) = (0,11) + k(2,-1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x,y) = (3,4) + k(1,-2), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y) = (11,0) + k(-2,1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x,y) = (4,3) + k(-1,2), k \in \mathbb{R}$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

4.2 Determine a equação reduzida da reta de Euler do triângulo $[ABC]$.

4.3 Seja F um ponto não representado na figura tal que $F = A - 2\overrightarrow{BC}$.

Determine a distância de F à origem do referencial.

5. Num referencial o.n. Oxy, considere um triângulo $[EVA]$.

Sabe-se que:

- o circuncentro do triângulo $[EVA]$ tem coordenadas $(2,4)$;
- o ortocentro do triângulo $[EVA]$ tem coordenadas $(6,8)$;
- a circunferência dos nove pontos passa no ponto P, de coordenadas $(5,4)$.

Qual das seguintes opções apresenta a equação reduzida da circunferência dos nove pontos do triângulo $[EVA]$?

(A) $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 5$

(B) $(x-4)^2 + (y-6)^2 = \sqrt{5}$

(C) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 5$

(D) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = \sqrt{5}$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por:

$$(x,y,z) = (3,-1,4) + k(-2,0,0), k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes também define a reta r?

(A) $x = 3 \wedge y = -1$ **(B)** $y = -1 \wedge z = 4$ **(C)** $x = 3 \wedge z = 4$ **(D)** $x = 0 \wedge y = -2$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r de equação vetorial:

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + k(2, -1, 3), k \in \mathbb{R}$$

7.1 Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 1. Qual das seguintes equações define o plano paralelo ao plano yOz e que contém o ponto A?

(A) $x = 3$ **(B)** $y = 1$ **(C)** $x = 2$ **(D)** $y = -1$

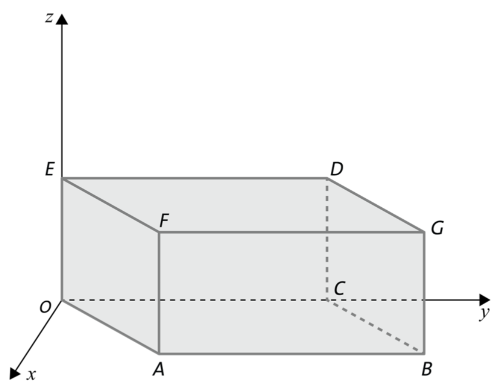
7.2 Seja B um ponto de coordenadas $(3, 0, 5)$ e C um ponto da reta r, com ordenada negativa. Sabe-se que $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{26}$.

Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro em C e que contém o ponto B.

8. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular reto $[OABCDEFG]$.

Sabe-se que:

- o paralelogramo $[OABC]$, base do prisma, está contido no plano $z = 0$;
- o vértice C pertence ao eixo Oy e o vértice E pertence ao eixo Oz;
- o vértice F tem coordenadas $(4, 5, 6)$;
- $3\overline{AB} = 4\overline{OE}$.



8.1 Escreva uma equação do plano mediador de $[OF]$. Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, em que a, b, c e d são números reais.

8.2 Mostre que o ponto G tem coordenadas $(4, 13, 6)$.

8.3 Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AD]$ e $\vec{r}$ um vetor tal que $\vec{r} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EB}$.

Escreva uma equação vetorial da reta que passa no ponto M e tem a direção do vetor $\vec{r}$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**5.**	**6.**	**7.1**	**7.2**	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**Total**
18	20	10	10	18	18	10	10	10	18	20	18	20	**200**

Teste N.º 5 – Proposta de resolução

1. De acordo com os dados do enunciado, sabemos que o vértice da parábola que representa graficamente a função g tem coordenadas $(1, 9)$. Assim, a função g pode ser escrita na forma:

$$g(x) = a(x-1)^2 + 9$$

Como o gráfico de g passa no ponto de coordenadas $(0, 8)$, temos que:

$g(0) = 8 \Leftrightarrow a(0-1)^2 + 9 = 8 \Leftrightarrow a = -1$

Logo, uma expressão analítica que define a função g é $g(x) = -(x-1)^2 + 9$.

A e B são os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g, pelo que, para determinar as suas abcissas, teremos de resolver a equação $g(x) = f(x)$, isto é, $-(x-1)^2 + 9 = x + 6$.

Assim:

$$\begin{aligned}
-(x-1)^2 + 9 = x + 6 &\Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) + 9 = x + 6 \\
&\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 + 9 - x - 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{-2} \ \vee \ x = \frac{-1+3}{-2} \\
&\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -1
\end{aligned}$$

As abcissas dos pontos A e B são, respetivamente, -1 e 2.

2. Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A.

Como A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox, A tem ordenada 0. Substituindo y por 0 na equação da circunferência, obtemos:

$$\begin{aligned}
(x-4)^2 + (0+2)^2 = 5 &\Leftrightarrow (x-4)^2 + 4 = 5 \\
&\Leftrightarrow (x-4)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow x - 4 = 1 \ \vee \ x - 4 = -1 \\
&\Leftrightarrow x = 5 \ \vee \ x = 3
\end{aligned}$$

Como A é o ponto de menor abcissa, tem-se que as suas coordenadas são $(3, 0)$.

B é ponto de interseção da circunferência com a reta s definida por $x = 6$.

Substituindo x por 6 na equação da circunferência, obtemos:

$$\begin{aligned}
(6-4)^2 + (y+2)^2 = 5 &\Leftrightarrow 4 + (y+2)^2 = 5 \\
&\Leftrightarrow (y+2)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow y + 2 = 1 \ \vee \ y + 2 = -1 \\
&\Leftrightarrow y = -1 \ \vee \ y = -3
\end{aligned}$$

Como B é o ponto de interseção da circunferência C com a reta s de maior ordenada, as suas coordenadas são $(6,-1)$.

Determinemos, agora, o declive da reta AB:

$$m=\frac{-1-0}{6-3}=-\frac{1}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta r é da forma:

$$y=-\frac{1}{3}x+b$$

Como o ponto A pertence à reta, temos:

$0=-\frac{1}{3}\times 3+b \Leftrightarrow 0=-1+b \Leftrightarrow b=1$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y=-\frac{1}{3}x+1$.

Assim, uma condição que define a região colorida é:

$$(x-4)^2+(y+2)^2<5 \ \wedge \ y<-\frac{x}{3}+1 \ \wedge \ x<6$$

3. Opção (C)

Para determinar a interseção dos gráficos das funções f e g, teríamos de resolver a equação $f(x)=g(x)$, isto é:

$x^2-5x+1=ax-15 \Leftrightarrow x^2-(5+a)x+16=0$

Como se pretende que esta equação tenha uma única solução, é necessário que $\Delta=0$.

Assim:

$\left(-(5+a)\right)^2-4\times 1\times 16=0 \Leftrightarrow (5+a)^2=64$

$\Leftrightarrow 5+a=-8 \ \vee \ 5+a=8$

$\Leftrightarrow a=-13 \ \vee \ a=3$

4.

4.1 Opção (D)

Seja $P(x,y)$ um qualquer ponto pertencente à mediatriz de $[AB]$.

Então, $d(A,P)=d(B,P)$, pelo que:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4=x^2-12x+36+y^2-8y+16$

$\Leftrightarrow -4x+4-4y+4=-12x+36-8y+16$

$\Leftrightarrow 4y=-8x+44$

$\Leftrightarrow y=-2x+11$

Assim, a reta de equação $y=-2x+11$ é a mediatriz de $[AB]$.

O declive desta reta é -2, pelo que um vetor diretor desta reta terá de ser colinear ao vetor de coordenadas $(1,-2)$, o que nos permite excluir as opções (A) e (C).

Sabemos que o ponto de coordenadas $(0, 11)$ pertence à reta, pelo que vamos analisar em qual das opções (B) ou (D) tal se verifica:

(B) $(0,11) = (3,4) + k(1,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + k \\ 11 = 4 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ 2k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = \frac{7}{2} \end{cases}$

Como se obtiveram valores de k distintos, conclui-se que o ponto de coordenadas $(0, 11)$ não pertence à reta definida nesta opção.

(D) $(0,11) = (4,3) + k(-1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 - k \\ 11 = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ 2k = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = 4 \end{cases}$

Como obtivemos o mesmo valor de k, conclui-se que o ponto de coordenadas $(0, 11)$ pertence à reta definida nesta opção.

Assim, a opção que apresenta uma equação vetorial da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é a (D).

4.2 Sabemos que, num triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto. Assim, a reta de Euler é a reta que passa por esses dois pontos.

Comecemos por determinar as coordenadas do ponto médio de $[AC]$:

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (3, 5)$$

Determinemos agora o declive da reta de Euler:

$$m = \frac{4-5}{6-3} = -\frac{1}{3}$$

A equação da reta de Euler é da forma $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(3, 5)$ pertence à reta, tem-se que:

$$5 = -\frac{1}{3} \times 3 + b \Leftrightarrow b = 6$$

Assim, a equação reduzida da reta de Euler é $y = -\frac{1}{3}x + 6$.

4.3 $F = A - 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow F = (2,2) + 2\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow F = (2,2) + 2(6-4, 4-8)$

$\Leftrightarrow F = (2,2) + 2(2,-4)$

$\Leftrightarrow F = (2,2) + (4,-8)$

$\Leftrightarrow F = (6,-6)$

$$d_{(F,O)} = \sqrt{(0-6)^2 + \left(0-(-6)\right)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

5. Opção (A)

Na circunferência dos nove pontos, o centro é o ponto médio do segmento de reta definido pelo circuncentro e pelo ortocentro.

Assim, as coordenadas do centro são $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = (4, 6)$ e a equação da circunferência dos nove pontos é da forma:

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = r^2$$

Sabemos que a circunferência dos nove pontos passa no ponto P de coordenadas $(5, 4)$, logo:

$$(5-4)^2 + (4-6)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 5$$

Desta forma, a equação reduzida da circunferência dos nove pontos do triângulo $[EVA]$ é:

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 5$$

6. Opção (B)

Como um vetor diretor da reta r tem coordenadas $(-2, 0, 0)$, a reta é paralela ao eixo Ox. Além disso, como um ponto de r tem coordenadas $(3, -1, 4)$, a reta r pode ser definida por uma condição do tipo $y = -1 \wedge z = 4$.

7.

7.1 Opção (A)

Determinemos as coordenadas do ponto A:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ 1 = 2 - k \\ z = -1 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \times 1 \\ k = 1 \\ z = -1 + 3 \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Logo, $A = (3, 1, 2)$. Assim, uma equação que define o plano paralelo a yOz e que contém o ponto A é $x = 3$.

7.2 C é ponto da reta r, pelo que as suas coordenadas são da forma:

$$(1 + 2k, 2 - k, -1 + 3k)$$

Determinemos, assim, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BC} = C - B = (1 + 2k, 2 - k, -1 + 3k) - (3, 0, 5) =$

$= (2k - 2, 2 - k, 3k - 6)$

Sabemos que $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{26}$, logo:

$\sqrt{(2k-2)^2 + (2-k)^2 + (3k-6)^2} = \sqrt{26}$

$\Leftrightarrow (2k-2)^2 + (2-k)^2 + (3k-6)^2 = 26$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 4 + k^2 - 4k + 4 + 9k^2 - 36k + 36 = 26$

$\Leftrightarrow 14k^2 - 48k + 18 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \times 14 \times 18}}{2 \times 14}$

$\Leftrightarrow k = \frac{48 \pm 36}{28}$

$\Leftrightarrow k = \frac{84}{28} \vee k = \frac{12}{28}$

$\Leftrightarrow k = 3 \vee k = \frac{3}{7}$

Se $k = 3$, então $C = (1 + 2 \times 3, 2 - 3, -1 + 3 \times 3) = (7, -1, 8)$.

Se $k = \frac{3}{7}$, então $C = \left(1 + 2 \times \frac{3}{7}, 2 - \frac{3}{7}, -1 + 3 \times \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{13}{7}, \frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Como C tem ordenada negativa, as suas coordenadas são $C = (7, -1, 8)$.

Assim, a equação reduzida da superfície esférica de centro em C, e que contém o ponto B, é:

$$(x - 7)^2 + (y + 1)^2 + (z - 8)^2 = 26$$

8.

8.1 Seja $P(x, y, z)$ um qualquer ponto pertencente ao plano mediador de $[OF]$.

Então, $d(O, P) = d(F, P)$, pelo que:

$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z - 6)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 12z + 36$

$\Leftrightarrow -8x - 10y - 12z + 77 = 0$

8.2 Sabemos que o ponto E pertence ao eixo Oz e tem a mesma cota que o ponto F, pelo que as suas coordenadas são $(0, 0, 6)$. Como se sabe que $3\overline{AB} = 4\overline{OE}$, então:

$3\overline{AB} = 4 \times 6 \Leftrightarrow 3\overline{AB} = 24 \Leftrightarrow \overline{AB} = 8$

Assim, uma vez que $\overline{AB} = 8$, a ordenada do ponto B é igual a $8 + 5 = 13$.

O ponto G tem a mesma abcissa que o ponto A, a mesma ordenada que o ponto B e a mesma cota que o ponto E, pelo que as suas coordenadas são $(4, 13, 6)$.

8.3 O ponto D tem coordenadas $(0, 8, 6)$, e as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AD]$ são:

$$M = \left(\frac{4 + 0}{2}, \frac{5 + 8}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = \left(2, \frac{13}{2}, 3\right)$$

$\overrightarrow{AG} = G - A = (4, 13, 6) - (4, 5, 0) = (0, 8, 6)$

$\overrightarrow{EB} = B - E = (4, 13, 0) - (0, 0, 6) = (4, 13, -6)$

Logo:

$\vec{r} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EB} = (0, 8, 6) - (4, 13, -6) = (-4, -5, 12)$

O vetor $\vec{r}$ é um vetor diretor da reta r.

Assim, uma equação vetorial da reta que passa no ponto M e que tem a direção do vetor $\vec{r}$ é:

$$(x, y, z) = \left(2, \frac{13}{2}, 3\right) + k(-4, -5, 12), \, k \in \mathbb{R}$$