Teste de avaliação n.º 4

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome:	**| N.º:**	**| Turma:**
Duração do teste: 90 minutos	**| Tolerância:** 10 minutos	**| Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos de E. Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{3}{10}$
- $P(A \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap B)$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

2. Um estudo sobre o turismo na cidade de Faro analisou as chegadas por via aérea e as nacionalidades dos visitantes.

2.1. Num dia de agosto, sabe-se que:

- 75% dos turistas que visitaram Faro chegaram num voo da companhia aérea *Máximo Airlines*;
- metade dos turistas que chegaram a Faro num voo da *Máximo Airlines* é de nacionalidade inglesa;
- um em cada oito turistas que são de nacionalidade inglesa, não chegaram a Faro num voo da *Máximo Airlines*.

Determine a probabilidade de, escolhido ao acaso um turista que chegou de avião a Faro nesse dia, ser de nacionalidade inglesa.

2.2. Num determinado voo estavam 200 passageiros, dos quais 60 eram de nacionalidade inglesa.

No âmbito de uma campanha promocional, a *Máximo Airlines* decidiu oferecer 8 *vouchers* para entrada num parque aquático, atribuídos ao acaso a 8 passageiros desse voo.

Qual é a probabilidade de pelo menos dois *vouchers* terem sido atribuídos a passageiros de nacionalidade inglesa?

(A) $1 - \frac{{}^{140}C_8}{{}^{200}C_8}$

(B) $1 - \frac{{}^{60}C_2 \times {}^{140}C_8}{{}^{200}C_8}$

(C) $1 - \frac{{}^{140}C_8 + {}^{60}C_1 \times {}^{140}C_7}{{}^{200}C_8}$

(D) $1 - \frac{{}^{60}C_1 \times {}^{140}C_7 + {}^{60}C_2 \times {}^{140}C_6}{{}^{200}C_8}$

3. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = \frac{3n+2}{1+3n} \qquad \text{e} \qquad v_n = (u_n)^n$$

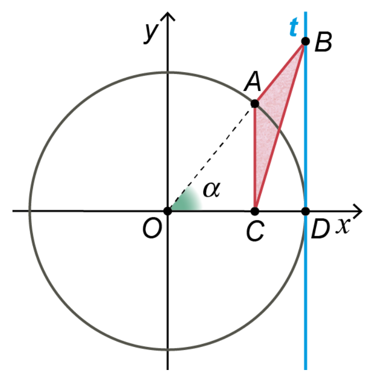
Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ \ln(\mathrm{e}x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de $\lim g(v_n)$?

(A) $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ **(B)** $-\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ **(C)** $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$ **(D)** $\frac{4}{3}$

4. Na figura estão representados a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta t.



Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ é paralelo ao eixo Oy;
- o ponto C pertence ao eixo Ox;
- a reta t é a reta tangente à circunferência no ponto D de coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto A pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à reta t e à semirreta $\dot{O}A$.

Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e o lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$.

4.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada, em função de α, pela expressão

$$\frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha)}{4}$$

4.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[AOC]$.

5. Seja f a função, de domínio $]-3, +\infty[$, definida por:

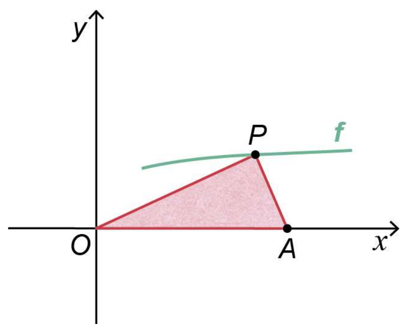
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x-2} - e^{2x}}{5x - 6 - x^2} & \text{se} \quad -3 < x < 2 \\ \ln(2x+1) - \ln(x+3) & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Estude a continuidade da função f em $x = 2$.

5.2. Determine as equações das assíntotas ao gráfico da função f paralelas aos eixos coordenados.

5.3. Na figura seguinte, estão representados, num referencial o. n. Oxy, parte do gráfico da função f e um triângulo $[OAP]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(6, 0)$;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função f, de **abcissa positiva maior que 2**;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 1.

Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, a abcissa do ponto P.

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o gráfico da função visualizado na calculadora que lhe permita resolver a equação.

6. Seja f uma função de domínio $]0, +\infty[$, duas vezes diferenciável.

Relativamente à função f, sabe-se que:

- f' é estritamente crescente em $]0, +\infty[$;
- $f'(2) = 3$.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f pode ter concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$.

II. No intervalo $]2, 8[$, a função f tem um extremo relativo.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas, apresentando, para cada uma delas, uma razão que justifique a sua falsidade.

7. Considere $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 1$ e $b > 1$, tais que $\sqrt{b} = a^2$ e a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \frac{\log x + 1}{10e^x - 1}$.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I, II** e **III**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O valor numérico da expressão $\log_a b$ é igual a __**I**__ e o valor numérico da expressão $\log_b a$ é igual a __**II**__.

O conjunto-solução da condição $f(x) > 0$ é __**III**__.

I	II	III
a) $\frac{1}{2}$ **b)** 1 **c)** 4	**a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 2	**a)** $\left]-\infty, \ln\frac{1}{10}\right[\cup \left]\frac{1}{10}, +\infty\right[$ **b)** $\left]\frac{1}{10}, +\infty\right[$ **c)** $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$

8. De uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada, g', é definida por $g'(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

8.1. Qual dos seguintes valores corresponde ao valor do limite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{g(x)-g(1)}$?

(A) -1 **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

8.2. **Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, mostre que $g''(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ e estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

9. Seja f uma função de domínio $[a, 2a]$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio;
- $2f(2a) < 2f(a) - a$

Considere a função g, de domínio $\left[\frac{a}{2}, a\right]$, definida por $g(x) = f(2x) - f(a) + \frac{a}{6}$.

Mostre que a função g tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{a}{2}, a\right[$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	**Total**
10	16	10	10	16	16	16	16	16	16	16	10	16	16	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1. $P(A \cup \bar{B}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{5} + \frac{7}{10} - P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{4}$ $\quad P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$\Leftrightarrow -P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} - \frac{11}{10} \Leftrightarrow -P(A \cap \bar{B}) = -\frac{7}{20} \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{7}{20}$

$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{20} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - P(A \cap B) = \frac{7}{20}$

$\Leftrightarrow -P(A \cap B) = \frac{7}{20} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

Assim, $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$.

Opção (C)

2.

2.1. Sejam A: «Ser de nacionalidade inglesa» e B: «Chegar num voo da *Máximo Airlines*»

$P(B) = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

$P(A|B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$P(\bar{B}|A) = \frac{1}{8}$ $\quad$ Seja $P(A) = k$

$P(\bar{B}|A) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{8}k$

$P(A) = ?$

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{4}$
$\bar{B}$	$\frac{1}{8}k$		
	k		1

$\frac{3}{8} + \frac{1}{8}k = k \Leftrightarrow 3 + k = 8k \Leftrightarrow 3 = 7k \Leftrightarrow k = \frac{3}{7}$

Temos assim, que $P(A) = \frac{3}{7}$.

2.2. Número de casos possíveis:

O número de formas de escolher 8 passageiros de entre 200 é: ${}^{200}C_8$

Número de casos favoráveis:

"Pelo menos dois" significa: $2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou 8 passageiros ingleses.

1) Nenhum passageiro inglês:

Escolhem-se 8 passageiros entre os 140 não ingleses: ${}^{140}C_8$.

2) Exatamente um passageiro inglês:

Escolhe-se 1 entre os 60 ingleses e 7 entre os 140 não ingleses: ${}^{60}C_1 \times {}^{140}C_7$.

Assim, temos que $P = 1 - \frac{{}^{140}C_8 + {}^{60}C_1 \times {}^{140}C_7}{{}^{200}C_8}$.

Opção (C)

3.

$$\lim v_n = \lim \left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^n$$
$$= \lim \left(\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right)^{\frac{n}{3n+1}}$$
$$= \left(\mathrm{e}^1\right)^{\lim \frac{n}{3n+1}} = \left(\mathrm{e}^1\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}}$$

$$\begin{array}{r|l} 3n+2 & 3n+1 \\ \cline{2-2} -3n-1 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$\lim g(v_n) = \lim_{x \to \sqrt[3]{e}} g(x) = g\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

Opção (D)

4.

4.1. $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, logo $\overline{AC} = \sin\alpha$ e $\overline{OC} = \cos\alpha$

Assim, temos que $\overline{CD} = 1 - \cos\alpha$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{CD}}{2} = \frac{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{2}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha}{2}$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, logo $\frac{\sin(2\alpha)}{2} = \sin\alpha\cos\alpha$

$$= \frac{\sin\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}}{2}$$

$$= \frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha)}{4}$$

4.2. Pretende-se $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que a área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[AOC]$.

Triângulo $[AOC]$:

Como $\overline{OC} = \cos\alpha$ e $\overline{AC} = \sin\alpha$ então: $A_{[AOC]} = \frac{\overline{OC}\times\overline{AC}}{2} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2} = \frac{\sin(2\alpha)}{4}$

$$A_{[ABC]} = A_{[AOC]} \Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha)}{4} = \frac{\sin(2\alpha)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha)}{4} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha - \sin(2\alpha) - \sin(2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha - 2\sin(2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha = 2\sin(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\alpha + 2k\pi \ \vee \ \alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha = 2k\pi \ \vee \ 3\alpha = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \ \vee \ \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, se $k = 0$: $\alpha = 0 \ \vee \ \alpha = \frac{\pi}{3}$

se $k = 1$: $\alpha = 2\pi \ \vee \ \alpha = \pi$

se $k = -1$: $\alpha = -2\pi \ \vee \ \alpha = -\frac{\pi}{3}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

A área do triângulo $[ABC]$ é igual à área do triângulo $[AOC]$, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

5.

5.1. Para f ser contínua em $x=2$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$f(2) = \ln(4+1) - \ln(2+3) = \ln(5) - \ln(5) = 0$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{3x-2} - e^{2x}}{5x-6-x^2} =$$
$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{3(y+2)-2} - e^{2(y+2)}}{5(y+2) - 6 - (y+2)^2} =$$
$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{3y+6-2} - e^{2y+4}}{5y+10-6-y^2-4y-4} =$$
$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{3y+4} - e^{2y+4}}{y-y^2} =$$
$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{(e^y - 1)\, e^{2y+4}}{y(1-y)} =$$
$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{2y+4}}{1-y} =$$
$$= 1 \times \frac{e^{0+4}}{1-0} = e^4$$

mudança de variável:

$y = x-2 \Leftrightarrow x = y+2$

$x \to 2^-;\, y \to 0^-$

f não é contínua em $x=2$.

5.2. Assíntotas horizontais:

Quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+3)] = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right) = \ln\frac{2+0}{1+0} = \ln 2$$

$y = \ln 2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$

Assíntotas não verticais:

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0 \neq \pm\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = e^4 \neq \pm\infty$ resultados da alínea anterior

$x=2$ não é uma equação de uma assintota vertical ao gráfico da função f.

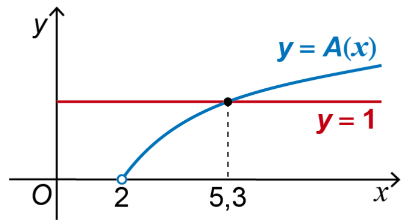
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{e^{3x-2} - e^{2x}}{5x-6-x^2} = \frac{e^{-11} - e^{-6}}{-15-6-9} = \frac{e^{-11} - e^{-6}}{-30} \neq \pm\infty$$

$x=-3$ não é uma equação de uma assintota vertical ao gráfico da função f.

O gráfico da função f não pode ter outras assíntotas verticais, porque a função é contínua em $]-3,2[$ e em $]2,+\infty[$.

5.3. $A_{[AOP]}(x) = \frac{6 \times |f(x)|}{2} = 3|\ln(2x+1) - \ln(x+3)|$, $x > 2$

$A(x) = 1$



A área do triângulo $[AOP]$ é igual a 1 u. a. quando o ponto P tem abcissa aproximadamente igual a $5{,}3$.

6. As duas proposições apresentadas são falsas relativamente à função f, duas vezes diferenciável e, por isso, contínua.

Uma vez que a função derivada de f, f', é estritamente crescente em $]0, +\infty[$, então a segunda derivada de f, f'', é não negativa nesse intervalo. Assim, em $]0, +\infty[$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o que torna a proposição I falsa.

Para a função f ter um extremo relativo, máximo ou mínimo, então a derivada da função nesse ponto será zero. Contudo, como f' é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e como $f'(2) = 3$, então podemos concluir que a derivada da função f no intervalo $[2, +\infty[$ é sempre positiva. Assim, no intervalo $]2, 8[$, a função f não pode ter nenhum extremo relativo, pois a equação $f'(x) = 0$ não é possível nesse intervalo. Desta forma, a proposição II é falsa.

7. Sabemos que $\sqrt{b} = a^2$, logo $b = (a^2)^2 = a^4$ ou, por outro lado, $a = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}}$

Assim, temos que: $\log_a b = \log_a a^4 = 4$ **I → c)**

$\log_b a = \log_b b^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ **II → a)**

III. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge 10e^x - 1 \neq 0\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq \ln\frac{1}{10}\right\} = \mathbb{R}^+$

$10e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 10e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{10} < 0$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\log x + 1}{10e^x - 1} > 0$

Zeros: $\log x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$

x	0		$\frac{1}{10}$	$+\infty$
$\log x + 1$	ND	$-$	0	$+$
$10e^x - 1$	ND	$+$	$+$	$+$
$\frac{\log x + 1}{10e^x - 1}$	ND	$-$	0	$+$

$S = \left]\frac{1}{10}, +\infty\right[$ **III → b)**

I – c)
II – a)
III – b)

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{g(x)-g(1)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{\frac{x^2-3x+2}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}} =$

$= \frac{\lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}}{\lim\limits_{x\to1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}} =$

$= \frac{\lim\limits_{x\to1} (x-2)}{g'(1)} =$

$= \frac{1-2}{1} =$

$= -1$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

$g'(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$

Opção (C)

8.2. Dado $g'(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, tem-se $g''(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)'$.

$$g''(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times x - (1+\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1-(1+\ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $x^2 > 0$, pelo que o sinal de $g''(x)$ é o sinal de $-\ln x$.

- Se $0 < x < 1$, então $\ln x < 0 \Rightarrow -\ln x > 0 \Rightarrow g''(x) > 0$.

  Logo, o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $]0,1]$.
- Se $x > 1$, então $\ln x > 0 \Rightarrow -\ln x < 0 \Rightarrow g''(x) < 0$.

  Logo, o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $[1,+\infty[$.

Como $g''(1) = -\frac{\ln 1}{1^2} = 0$ e g'' muda de sinal em $x = 1$, o gráfico de g tem um ponto de inflexão com abcissa 1, isto é, no ponto de coordenadas $(1, g(1))$.

9. A função g é contínua em $\left[\frac{a}{2}, a\right]$.

$g\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{2a}{2}\right) - f(a) + \frac{a}{6} = f(a) - f(a) + \frac{a}{6} = \frac{a}{6} > 0$, pois $a \in \mathbb{R}^+$.

$g(a) = f(2a) - f(a) + \frac{a}{6}$

Como $2f(2a) < 2f(a) - a$, então $f(2a) < f(a) - \frac{a}{2}$

$g(a) = f(2a) - f(a) + \frac{a}{6} < f(a) - \frac{a}{2} - f(a) + \frac{a}{6} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{6} = -\frac{a}{3} < 0$, pois $a \in \mathbb{R}^+$.

Logo, $g(a) \times g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$.

Como a função g é contínua em $\left[\frac{a}{2}, a\right]$ e $g(a) \times g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$, então, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que a função g tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{a}{2}, a\right[$.