Teste de avaliação n.º 4

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome:	**| N.º:**	**| Turma:**
Duração do teste: 90 minutos	**| Tolerância:** 10 minutos	**| Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere as sucessões definidas por:

$a_n = 1 + \frac{2}{n}$ $\qquad b_n = n^2$ $\qquad c_n = \frac{1}{n}$ $\qquad d_n = 2n$ $\qquad e_n = (-1)^n$

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II e III, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da sucessão (a_n) é __**I**__.

2 é termo de __**II**__ das sucessões apresentadas.

A sucessão __**III**__ é não monótona.

I	II	III
a) $-\frac{2}{n(n+1)}$	**a)** duas	**a)** (c_n)
b) $\frac{1}{n(n+1)}$	**b)** três	**b)** (d_n)
c) $\frac{4n-2}{n(n+1)}$	**c)** quatro	**c)** (e_n)

2. Considere a sucessão (a_n) definida por recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1, \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \end{cases}$$

Para uma certa ordem $p > 2$, sabe-se que $a_p = k$, $k \in \mathbb{R}$.

A qual das seguintes expressões é igual o termo de (a_n) de ordem $p - 2$?

(A) $2k - 1$ $\qquad$ **(B)** $4k - 3$ $\qquad$ **(C)** $\frac{k+3}{4}$ $\qquad$ **(D)** $\frac{k+1}{2}$

3. Num videojogo, um jogador progride através de níveis sucessivos.
Para passar do nível 0 para o nível 1, são necessários 18 cristais.
A partir deste, para passar de cada nível para o seguinte, o número de cristais necessários aumenta sempre em 6 relativamente ao nível anterior.
Sempre que se passa de nível, os cristais utilizados desaparecem e deixam de poder ser usados.
Determine o último nível que o jogador conseguiu atingir antes de deixar de ter cristais suficientes para passar ao nível seguinte, sabendo que, ao longo do jogo, ganhou um total de 528 cristais.
Apresente todos os cálculos que efetuar.

4. Considere a progressão geométrica (u_n) definida por:

$$u_n = k \times r^{n-1}, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

em que k é um número real positivo e $0 < r < 1$.
Admitindo que:

4.1. $u_2 + u_4 = 20$ e $u_3 + u_5 = 10$, determine o valor de k.

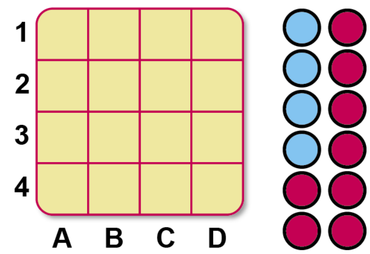
4.2. $k = r^{-1} = 2$, determine a soma de todos os termos de ordem par de (u_n).

5. Considere o seguinte problema:

> Um restaurante criou um menu especial com sete pratos principais distintos, dos quais três são vegetarianos.
> Um casal vai jantar ao restaurante e decide escolher dois pratos principais distintos.
> A ordem de escolha é relevante, pois o restaurante regista qual dos elementos do casal escolheu cada opção.
> Pretende-se determinar o número de escolhas possíveis que incluem pelo menos uma opção vegetariana.

Dois alunos apresentaram as seguintes respostas.
Resposta do aluno A: ${}^{7}A_2 - {}^{4}A_2$
Resposta do aluno B: ${}^{3}C_2 + {}^{3}C_1 \times {}^{4}C_1$
Indique qual dos alunos apresentou a resposta correta e explique o erro cometido pelo outro aluno, corrigindo-o.

6. Considere um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro colunas verticais (A, B, C e D) e em quatro linhas horizontais (1, 2, 3 e 4).



Neste tabuleiro vão ser colocadas oito fichas vermelhas e quatro fichas azuis, de modo que cada uma destas peças ocupe uma única casa e que cada casa não possa ser ocupada por mais do que uma peça.
As doze fichas distinguem-se apenas pela cor.
De quantas formas diferentes se podem dispor as fichas no tabuleiro, de modo que cada coluna tenha exatamente uma ficha azul?

(A) 256 **(B)** 495 **(C)** 751 **(D)** $126\,720$

7. Num clube de xadrez, estão inscritos n jogadores.

7.1. Sabe-se que o número total de pares distintos de jogadores que se pode formar é igual ao número total de grupos distintos de três jogadores que se pode formar.
Determine o valor de n.

7.2. Seja $n = 10$.
Os 10 jogadores vão sentar-se numa mesa retangular com 10 lugares, um em cada cabeceira e os restantes distribuídos igualmente pelos dois lados da mesa.
O presidente do clube deve sentar-se obrigatoriamente numa das cabeceiras da mesa e o vice-presidente à sua direita.
Determine o número de disposições possíveis dos jogadores na mesa.
Justifique a sua resposta.

8. Num referencial o. n. $Oxyz$, consideram-se os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (k, 1, 2) \text{ e } \vec{v} = (k-4, -1, -2), \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Qual das opções apresenta os valores de k para os quais o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso?

(A) $k \in]-1,5[$

(B) $k \in]-1,5[\backslash\{2\}$

(C) $k \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$

(D) $k \in (]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[)\backslash\{2\}$

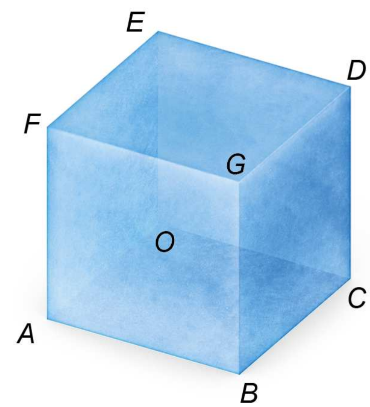
9. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere o cubo $[OABCDEFG]$ representado na figura.

Sabe-se que:

- a face $[BCDG]$ está contida no plano α de equação:

$$2x - y - 2z - 9 = 0$$

- o vértice F tem coordenadas $(3, 0, 3)$.



9.1. Mostre que as coordenadas do vértice G são $(5, -1, 1)$.

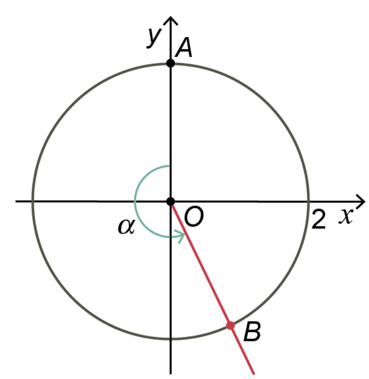
9.2. Considere um cilindro cujas bases estão contidas em duas faces opostas do cubo, de tal forma que são tangentes às arestas dessa face.

Admitindo a unidade do referencial como unidade de comprimento, determine o volume desse cilindro. Apresente o resultado arredondado às décimas.

10. Na figura encontra-se representada, em referencial o. n. Oxy, uma circunferência centrada na origem e de raio 2.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Oy;
- o ponto B pertence à circunferência tal que $A\hat{O}B = \alpha$, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.



Qual das opções corresponde à abcissa do ponto B?

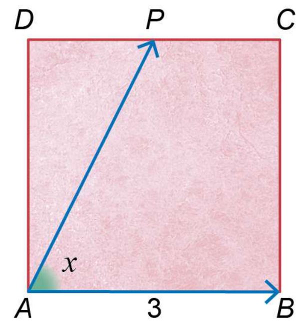
(A) $\sin(\alpha)$

(B) $2\sin(\alpha)$

(C) $-\sin(\alpha)$

(D) $-2\sin(\alpha)$

11. Na figura está representado o quadrado $[ABCD]$ de lado 3 e os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$, sendo $P \in [CD]$, tal que $B\hat{A}P = x$, com $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Determine, com recurso à calculadora gráfica, o valor de x tal que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 5$.
Apresente a resposta em radianos, arredondada às centésimas.
Na sua resposta deve:

- apresentar uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permita(m) resolver a equação;
- apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.**	**Total**
15	10	20	20	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

I.

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{2}{n+1}-\left(1+\frac{2}{n}\right)=1+\frac{2}{n+1}-1-\frac{2}{n}=\frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n-2n-2}{n(n+1)}=$$

$$=-\frac{2}{n(n+1)},\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$$

II.

- 2 é termo de (a_n), porque: $a_2=1+\frac{2}{2}=2$ e de (d_n), porque $d_1=2\times 1=2$
- 2 não é termo de (b_n), porque: $n^2=2\Rightarrow n=\sqrt{2}\notin\mathbb{N}\backslash\{0\}$
- 2 não é termo de (c_n), porque: $\frac{1}{n}=2\Leftrightarrow n=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\backslash\{0\}$
- 2 não é termo de (e_n), porque: $e_n=(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar}\\ 1 & \text{se} \quad n \text{ é par}\end{cases}$

III.

$e_n=(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar}\\ 1 & \text{se} \quad n \text{ é par}\end{cases}$, pelo que não é monótona.

I – a)

II – a)

III – c)

2. $a_p=2a_{p-1}-1\Leftrightarrow k=2a_{p-1}-1\Leftrightarrow a_{p-1}=\frac{k+1}{2}$

$$a_{p-1}=2a_{p-2}-1\Leftrightarrow\frac{k+1}{2}=2a_{p-2}-1\Leftrightarrow 2a_{p-2}=\frac{k+1}{2}+1\Leftrightarrow 2a_{p-2}=\frac{k+3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{p-2}=\frac{k+3}{4}$$

Opção (C)

3. O número de cristais necessários para passar de nível forma uma progressão aritmética com:

$a_1 = 18$

$r = 6$

Logo, o termo geral é:

$a_n = 18 + (n-1) \times 6$

$a_n = 18 + 6n - 6$

$a_n = 6n + 12$

A soma dos n primeiros termos é $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$

Quer-se determinar n tal que $S_n = 258$.

Daqui vem que:

$$528 = \frac{18 + 6n + 12}{2} \times n \Leftrightarrow 528 = 15n + 3n^2 \Leftrightarrow 3n^2 + 15n - 528 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times 3 \times (-528)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow n = \frac{-15 \pm \sqrt{6561}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 11 \vee n = -16$$

Como n é natural:

$n = 11$

Logo, o último nível atingido foi o nível 11.

4.

4.1. $u_2 = kr$, $u_3 = kr^2$, $u_4 = kr^3$, $u_5 = kr^4$

Sabendo que $u_2 + u_4 = 20$, obtemos:

$kr + kr^3 = 20 \Leftrightarrow kr(1 + r^2) = 20$

Por outro lado, sabendo que $u_3 + u_5 = 10$, obtemos:

$kr^2 + kr^4 = 10 \Leftrightarrow kr^2(1 + r^2) = 10 \Leftrightarrow rkr(1 + r^2) = 10$

Substituindo $kr(1 + r^2)$ por 20 na segunda equação, obtemos:

$$r \times 20 = 10 \Leftrightarrow r = \frac{10}{20} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Substituindo o valor de r numa das equações, vem:

$$k \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 20 \Leftrightarrow k \times \frac{5}{8} = 20 \Leftrightarrow k = 32$$

4.2. $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Seja (v_n) a sucessão formada pelos termos de ordem par de (u_n). Então:

$v_n = u_{2n} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Como $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = 1 \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(v_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\frac{1}{4}$.

Como $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, a soma de todos os termos é igual a $S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

5. O aluno A deu a resposta correta.

O aluno B não considerou, na sua resposta, que a ordem dos pedidos é importante, considera apenas as escolhas dos pratos e não quem os pediu. Seguindo o raciocínio deste aluno, uma correção possível é $2! \times \left({}^{3}C_2 + {}^{3}C_1 \times {}^{4}C_1 \right)$.

6. De cada coluna, temos de selecionar uma casa para colocar a ficha azul:

${}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 = 256$

Das $16 - 4 = 12$ casas que sobram, temos de escolher oito, sem interessar a ordem, para colocar as fichas vermelhas, que são iguais: ${}^{12}C_8 = 495$.

Assim, existem ${}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 \times {}^{12}C_8 = 256 \times 495 = 126\,720$ formas diferentes de dispor as fichas no tabuleiro, de modo que cada coluna tenha exatamente uma ficha azul.

Opção (D)

7.

7.1.

$${}^{n}C_2 = {}^{n}C_3 \Leftrightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} \Leftrightarrow 2! \times (n-2)! = \frac{n! \times 3! \times (n-3)!}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2!}{3!} = \frac{(n-3)!}{(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{(n-3)!}{(n-2) \times (n-3)!} \Leftrightarrow n - 2 = 3 \Leftrightarrow n = 5$$

Verificação:

$${}^{5}C_2 = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = {}^{5}C_3$$

$n = 5$

7.2. O presidente tem duas hipóteses para se sentar: ou numa cabeceira ou na outra. O vice-presidente só tem uma hipótese, que é à direita do presidente. Os restantes oito elementos do clube podem permutar entre si nos oito restantes lugares de $(10-2)! = 8!$ maneiras.

Assim, existem $2 \times 1 \times 8! = 80\,640$ formas diferentes de os sócios se distribuírem pelos 10 lugares da mesa.

8. Se ângulo é obtuso, então $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

Calculando o produto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = k(k-4) + 1(-1) + 2(-2) =$

$= k^2 - 4k - 1 - 4 =$

$= k^2 - 4k - 5$

$$k^2 - 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = -1 \vee k = 5$$

Tem-se que:

$k^2 - 4k - 5 < 0 \;\Leftrightarrow\; -1 < k < 5$

É necessário excluir o caso em que os vetores são simétricos.

Impondo $\vec{v} = -\vec{u}$, tem-se:

$(k-4, -1, -2) = (-k, -1, -2) \Leftrightarrow k - 4 = -k \Leftrightarrow k = 2$

Para $k = 2$, o ângulo tem $180°$ de amplitude, logo não é obtuso e deve excluir-se.

Logo, $k \in \,]-1, 5[\,\backslash\{2\}$.

Opção (B)

9.

9.1. A reta r, definida por $r\colon (x, y, z) = (3, 0, 3) + k(2, -1, -2), k \in \mathbb{R}$, é a reta perpendicular ao plano BCD que passa pelo vértice F, passando por isso também por G.

Logo, o vértice G é o ponto de interseção da reta r com o plano α.

Ponto genérico de $r : (x, y, z) = (3 + 2k, -k, 3 - 2k), k \in \mathbb{R}$

Como $G \in \alpha$, substituindo as coordenadas do ponto genérico de r em $2x - y - 2z - 9 = 0$, obtém-se:

$2(3 + 2k) - (-k) - 2(3 - 2k) - 9 = 0 \Leftrightarrow 6 + 4k + k - 6 + 4k - 9 = 0 \Leftrightarrow 9k = 9 \Leftrightarrow k = 1$

Assim, $G(3 + 2, -1{,}3 - 2) = G(5, -1{,}1)$.

9.2.

$V = A_b \times h$

As bases do cilindro são tangentes às arestas das faces do cubo em que estão contidas.

Então, designando por x o comprimento da aresta do cubo, $A_b = \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2$ e $h = x$, ou seja:

$V = A_b \times h = \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times x$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no espaço, tem-se que:

$\overline{OG}^2 = x^2 + x^2 + x^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{27}\right)^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{3} \Leftrightarrow x^2 = 9$

$\boxed{\overline{OG} = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{27}}$

Como $x > 0$, $x = \sqrt{9} = 3$.

Assim, o volume do cilindro é:

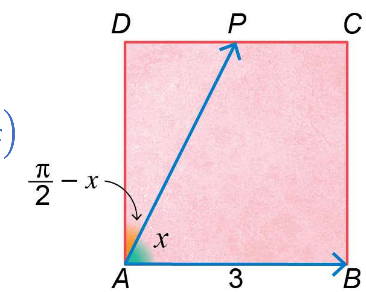
$V = A_b \times h = \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times x = \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 3 \approx 21{,}2 \text{ u. v.}$

10. A abcissa do ponto B é $2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -2\sin(\alpha)$. **Opção (D)**

11.

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\|\overrightarrow{DP}\|}{3}$

$\|\overrightarrow{DP}\| = 3\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right) =$

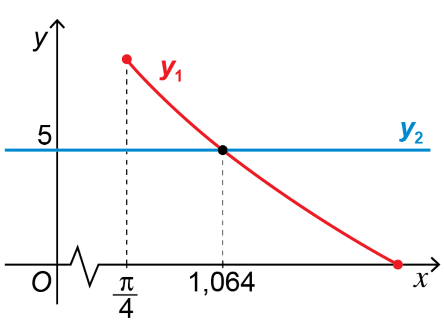
  $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DP} =$

  $= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{DP}\| \times \cos(0) =$

  $= 3 \times 3\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

- Equação a resolver em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\underbrace{9\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{y_1} = \underbrace{5}_{y_2}$$

- 

- Solução: $x \approx 1{,}06$ rad