1.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{e^{2x}\times e^{-kx}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1-\frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}\right)}{e^x\times e^x\times e^{-kx}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{e^{x-kx}}=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Limite notável}}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{e^{x(1-k)}}\underset{k<1\Rightarrow 1-k>0}{=}\frac{1}{+\infty}\times\frac{1-\frac{4}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}{e^{+\infty}}$$

$$=0\times\frac{1-0+0}{+\infty}=0\times\frac{1}{+\infty}=0\times0=0$$

1.2 A função g é contínua em $x=-1$ se $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=g(-1)$.

- $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)\right)=e^{-k}\left((-1)^2-4\times(-1)+1\right)=e^{-k}(1+4+1)=6e^{-k}$

- $g(-1)=e^{-k}\left((-1)^2-4\times(-1)+1\right)=e^{-k}(1+4+1)=6e^{-k}$

- $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{e^{x+1}}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{i)}{=}}\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x+1)(x-2)}{\left(e^{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}-1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x+1}{e^{\frac{x+1}{2}}-1}\times\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2)=$

$$\underset{\substack{y=\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow x+1=2y\\ x\to-1^-\Rightarrow y\to0^-}}{=}\lim_{y\to0^-}\frac{2y}{e^y-1}\times(-1-2)=2\lim_{y\to0^-}\frac{y}{e^y-1}\times(-3)=2\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}\times(-3)=2\times\frac{1}{1}\times(-3)=-6$$

Assim, $6e^{-k}=-6\Leftrightarrow e^{-k}=-1$, que é uma equação impossível em $\mathbb{R}$, pelo que não existe k de modo que a função g seja contínua em $x=-1$.

i) $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$. Logo, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

1.3 Para $k=-1$ e $x \in]-1,+\infty[$, tem-se $g(x)=e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)$.

Tem-se:

- $g'(x)=\left(e^{-x}\right)'\left(x^2-4x+1\right)+e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)'=-e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)+e^{-x}(2x-4)=$

$$=e^{-x}\left(-x^2+4x-1\right)+e^{-x}(2x-4)=e^{-x}\left(-x^2+4x-1+2x-4\right)=e^{-x}\left(-x^2+6x-5\right)$$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(-x^2+6x-5\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \lor -x^2+6x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-5)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-6-4}{-2} \lor x=\frac{-6+4}{-2} \Leftrightarrow x=5 \lor x=1$$

Fazendo um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g:

x	-1		1		5	$+\infty$
e^{-x}	n.d.	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+6x-5$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de g	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

Portanto, para $k=-1$ e $x\in]-1,+\infty[$, a função g é decrescente em $]-1,1]$ e em $[5,+\infty[$ e é crescente em $[1,5]$. Tem mínimo relativo em $x=1$ e máximo relativo em $x=5$.

2. Tem-se, $\log_5\left(\frac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)=\log_5\left(\sqrt{\left(5^3\right)^x}\right)-\log_5\left(5a^x\right)=\log_5\left(\sqrt{5^{3x}}\right)-\left(\log_5(5)+\log_5\left(a^x\right)\right)=$

$$=\log_5\left(5^{\frac{3x}{2}}\right)-\left(1+x\log_5 a\right)\underset{\log_5 a=x}{=}\frac{3x}{2}-1-x\times x=-x^2+\frac{3x}{2}-1$$

Resposta: A

3. Pretende-se mostrar que existe pelo menos um $c \in \left]1,3\right[$ tal que $(g \circ f)(c) = (f \times g)(c)$, de uma forma equivalente, que existe pelo menos um $c \in \left]1,3\right[$ tal que $(g \circ f)(c) - (f \times g)(c) = 0$.

Seja h, a função definida em $[1,3]$ por $h(x) = (g \circ f)(x) - (f \times g)(x)$. Vamos mostrar que a função h tem pelo menos um zero em $\left]1,3\right[$.

Tem-se:

- a função h é contínua em $[1,3]$ por ser o produto, a composição e a diferença entre funções contínuas no seu domínio;

- $h(1) = (g \circ f)(1) - (f \times g)(1) = g(f(1)) - f(1) \times g(1) = g(3) - 3 \times \log_3(1) = \log_3(3) - 3 \times 0 = 1 - 0 = 1$

$\therefore\ h(1) > 0$;

- $h(3) = (g \circ f)(3) - (f \times g)(3) = g(f(3)) - f(3) \times g(3) = \log_3(f(3)) - f(3) \times \log_3(3) =$

$$= \log_3(f(3)) - f(3) \times 1 = \log_3(f(3)) - f(3)$$

Como $0 < f(3) < 1$, então $\log_3(f(3)) < 0$, pelo que $\underbrace{\log_3(f(3))}_{<0} - \underset{>0}{f(3)} < 0$.

$\therefore\ h(3) < 0$.

Logo, como $h(1)$ e $h(3)$ têm sinais contrários ($\Rightarrow h(1) \times h(3) < 0$), e como h é contínua em $[1,3]$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função h tem pelo menos um zero em $\left]1,3\right[$, ou seja, existe pelo menos um $c \in \left]1,3\right[$ tal que $h(c) = (g \circ f)(c) - (f \times g)(c) = 0$, pelo que a equação dada é possível em $\left]1,3\right[$.

4.1 No início do movimento a distância da esfera ao chão é dada por:

$$d(0) = 3 + 3{,}5e^{-0{,}31\times 0} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi \times 0}{3}\right) = 3 + 3{,}5e^{0} \operatorname{sen}(0) = 3 + 3{,}5 \times 1 \times 0 = 3 + 0 = 3$$

Como a distância do centro da esfera ao chão no início do movimento é igual a $3{,}5$ cm, a medida do comprimento do raio da esfera é igual a $3{,}5 - d(0) = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$ cm.

Portanto, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera é igual a:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \times raio^3 = \frac{4}{3}\pi \times (0{,}5)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

Resposta: A

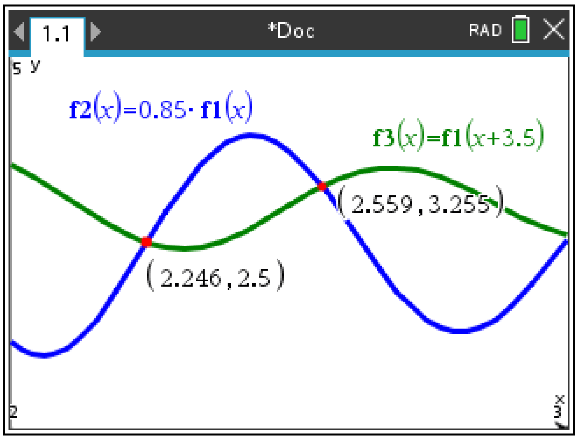
4.2 Sabemos que, durante o terceiro segundo de movimento, existem dois instantes, t_1 e t_2, tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15%.

Tem-se que $d(t)$ é a distância da bola ao solo num certo instante t e que $d(t+3{,}5)$ é a distância da bola ao solo três segundos e meio após o instante t.

Assim, pretende-se terminar os instantes $t \in [3,4]$ tais que:

$$d(t+3{,}5) = d(t) - 0{,}15\,d(t) \Leftrightarrow d(t+3{,}5) = 0{,}85\,d(t)$$

Utilizando o editor de função da calculadora gráfica, definem-se as funções $y_1 = d(t+3{,}5)$ e $y_2 = 0{,}85\,d(t)$:



Portanto, $d(t+3{,}5) = 0{,}85\,d(t) \Leftrightarrow t = t_1 \ \vee \ t = t_2$, em que $t_1 \approx 2{,}2$ e $t_2 \approx 2{,}6$.

Nota: foi usada a calculadora gráfica TI n-spire, em que $f_1(x) = 3 + 3{,}5e^{-0{,}31x}\,\text{sen}\left(\frac{8\pi x}{3}\right)$.

5.1 A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por ser o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio, pelo que, se o seu gráfico tiver assíntota vertical, só poderá ser em $x = 0$.

$$\text{Assim, } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 \ln x - 2\right) \underset{\substack{y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y} \\ x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty}}{\overset{(0\times\infty)}{=}} \lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{y}\right) - 2\right) \underset{ii)}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}(-\ln y) - 2\right) =$$

$$= -2 + \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln y}{y^2} = -2 + \underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\textit{Limite notável}} \times \lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{y} = -2 + 0 \times \frac{-1}{+\infty} = -2 + 0\times 0 = -2$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ é finito, o gráfico de f não tem assíntota vertical em $x = 0$, e, portanto, não tem assíntotas verticais.

5.2 O domínio de validade da equação é $\mathbb{R}^+$.

Tem-se $f(x)+x^2=2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x-2+x^2=2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x+x^2=2\ln x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(\ln x+1)=2(\ln x+1) \Leftrightarrow x^2(\ln x+1)-2(\ln x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x+1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \ \vee \ x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-1 \ \vee \ x^2=2 \Leftrightarrow x=e^{-1} \ \vee \ x=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e} \ \vee \ x=-\sqrt{2} \ \vee \ x=\sqrt{2}$$

Como $-\sqrt{2}\notin\mathbb{R}^+$ $\frac{1}{e}\in\mathbb{R}^+$ e $\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{1}{e},\sqrt{2}\right\}$.

5.3 Tem-se:

- $f'(x)=(x^2\ln x-2)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'-0=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{x}}=2x\ln x+x$
- $f''(x)=(2x\ln x+x)'=(2x\ln x)'+x'=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+1=2\ln x+2\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}+1=2\ln x+3$
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+3=0 \Leftrightarrow 2\ln x=-3 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

Fazendo um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
Gráfico de f	n.d.	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right[$. Tem ponto de inflexão em $x=e^{-\frac{3}{2}}$, cuja ordenada é:

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{3}{2}}-2=e^{-3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)-2=-\frac{3e^{-3}}{2}-2$$

Portanto, as coordenadas do ponto de inflexão são $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3e^{-3}}{2}-2\right)$.

6. Tem-se que $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{-(h(x)-h(a))}=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}}\underset{h \text{ é diferenciável em } \mathbb{R}}{=}-\frac{1}{h'(a)}$.

Tem-se $h'(x)=\left(\cos^2(2x)-2\right)'=2\cos(2x)\times(\cos(2x))'-0=2\cos(2x)\times(-2)\times\operatorname{sen}(2x)=$

$$=-2\times\underbrace{2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}_{=\operatorname{sen}(2\times 2x)}=-2\operatorname{sen}(4x)$$

Logo, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{-(h(x)-h(a))}=-\frac{1}{h'(a)}=-\frac{1}{-2\operatorname{sen}(4a)}=\frac{1}{2\operatorname{sen}(4a)}$.

Resposta: B

7.1 Como existe $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ então $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ $(0\notin D_g)$.

- $$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\underbrace{1-\cos^2(2x)}_{=\operatorname{sen}^2(2x)}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2(2x)}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\times\frac{(2x)^2}{\operatorname{sen}^2(2x)}\times\frac{x^2}{(2x)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}\right)^2\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}\underset{\substack{y=x^2 \text{ e } z=2x\\ x\to 0^-\Rightarrow y\to 0^+ \text{ e } z\to 0^-}}{\overset{(0\times\infty)}{=}}\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\times\frac{1}{\left(\lim\limits_{z\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^2}\times\frac{1}{4}$$

$$=1\times\frac{1}{1^2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

- $$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+f(x)}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(2x)+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)}=\frac{2\times 0+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{0+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{2}.$$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então é diferenciável em $x=0$, o que implica que f é contínua em $x=0$, pelo que $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$ e, portanto, $\frac{f(0)}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow f(0)=\frac{2}{4}\Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{2}$.

7.2 Como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$, o que implica que também o é em $x=1$, e como tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1, então $f'(1)=0$ e $f(1)=2$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Assim, o declive da reta t é dado por $g'(1)$ e o ponto de coordenadas $(1,g(1))$ pertence ao gráfico de g.

Assim, $g'(x)=\left(\frac{2x+f(x)}{x+2}\right)'=\frac{(2x+f(x))'(x+2)-(2x+f(x))(x+2)'}{(x+2)^2}=$

$$=\frac{(2+f'(x))(x+2)-(2x+f(x))\times 1}{(x+2)^2}=\frac{(2+f'(x))(x+2)-2x-f(x)}{(x+2)^2}.$$

Logo, o declive da reta t é igual a $g'(1)=\frac{(2+f'(1))(1+2)-2\times 1-f(1)}{(1+2)^2}=\frac{(2+0)\times 3-2-2}{3^2}=\frac{6-4}{9}=\frac{2}{9}$,

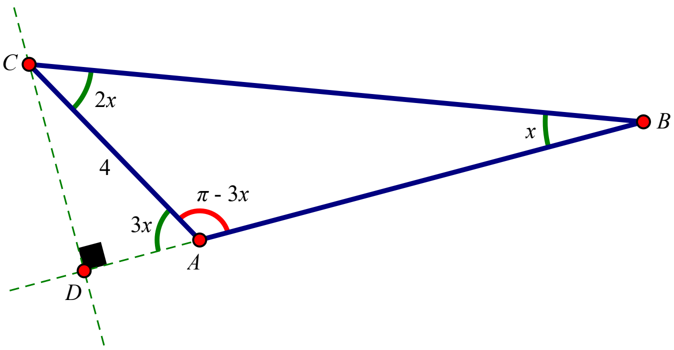
pelo que a equação reduzida da reta t é da forma $y=\frac{2}{9}x+b$.

Como $g(1)=\frac{2\times 1+f(1)}{1+2}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$, substituindo as coordenadas $(1,g(1))$ na equação de t:

$$\frac{4}{3}=\frac{2}{9}\times 1+b \Leftrightarrow b=\frac{4}{3}-\frac{2}{9}\Leftrightarrow b=\frac{10}{9}$$

$\therefore\ t: y=\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}$

8. Na figura seguinte, o segmento de reta $[CD]$ é a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AB]$.



Pretende-se, então, mostrar que:

$$\overline{CD}=12\operatorname{sen}x-16\operatorname{sen}^3 x$$

Tem-se que a amplitude do ângulo BAC é $\pi-2x-x=\pi-3x$, pelo que a amplitude do ângulo CAD é: $\pi-(\pi-3x)=\pi-\pi+3x=3x$

Logo $\operatorname{sen}(3x)=\frac{\overline{CD}}{4}\Leftrightarrow \overline{CD}=4\operatorname{sen}(3x)$.

Portanto, $\overline{CD}=4\operatorname{sen}(3x)\underset{3x=2x+x}{=}4\operatorname{sen}(2x+x)=4(\operatorname{sen}(2x)\cos x+\operatorname{sen}x\cos(2x))=$

$$=4\left(2\operatorname{sen}x\cos x\cos x+\operatorname{sen}x\left(\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\operatorname{sen}^2 x}-\operatorname{sen}^2 x\right)\right)=4\left(2\operatorname{sen}x\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\operatorname{sen}^2 x}+\operatorname{sen}x(1-2\operatorname{sen}^2 x)\right)$$

$$=4\left(2\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}^2 x)+\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}^3 x\right)=4\left(2\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}^3 x\right)$$

$$=4\left(3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x\right)=12\operatorname{sen}x-16\operatorname{sen}^3 x$$

9. Tem-se que $D=\{x\in\mathbb{R}: x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>-3 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\}=]0,3[$.

Neste domínio, tem-se:

$$\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\cancel{\frac{1}{2}}\times\frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 2}}$$

$i)\ \log_4 2=\log_4\left(\sqrt{4}\right)=\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_4 x$$

$$\Leftrightarrow\log_4(x+3)+\log_4 x\geq\log_4(6-2x)$$

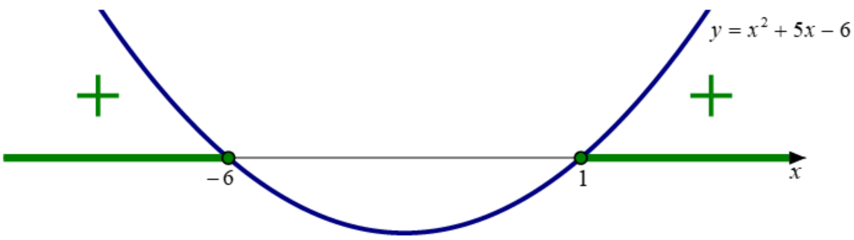
$$\Leftrightarrow\log_4\left(x(x+3)\right)\geq\log_4(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x\geq 6-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-6\geq 0$$

Cálculo auxiliar: $x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-6 \ \vee \ x=1$

O gráfico da função definida por $y=x^2+5x-6$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima:



Logo, $x^2+5x-6\geq 0\Leftrightarrow x\leq -6 \ \vee \ x\geq 1$, pelo que o conjunto solução da inequação dada é:

$$\left(]-\infty,-6]\cup[1,+\infty[\right)\cap]0,3[=[1,3[$$

10. A função g é contínua em $\left[-1,+\infty\right[$, pelo que é contínua em $x=k$ e, portanto,

$$\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^+} g(x)=g(k)$$

Assim:

- $\lim_{x\to k^+} g(x)=\lim_{x\to k^+} x=k$

- $g(k)=k$

- $\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^-}\frac{xe^{x-k}-k}{\operatorname{sen}(k-x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to k^-}\frac{\frac{xe^{x-k}-k}{x-k}}{\frac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}}=\frac{\lim_{x\to k^-}\frac{xe^{x-k}-k}{x-k}}{\lim_{x\to k^-}\frac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}}\underset{\substack{y=x-k\Leftrightarrow x=y+k\\ \text{Logo, } k-x=-(x-k)=-y\\ x\to k^-\Rightarrow y\to 0^-}}{=}\frac{\lim_{y\to 0^-}\frac{(y+k)e^y-k}{y}}{\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(-y)}{y}}=$

$$\underset{\substack{\operatorname{sen}(-y)=-\operatorname{sen} y\\ \text{A função seno}\\ \text{é ímpar}}}{=}\frac{\lim_{y\to 0^-}\frac{ye^y+ke^y-k}{y}}{-\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite notável}}}=\frac{\lim_{y\to 0^-}\frac{\cancel{y}e^y}{\cancel{y}}+\lim_{y\to 0^-}\frac{k\left(e^y-1\right)}{y}}{-1}=-e^0-k\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}=-1-k\times 1=-1-k$$

Logo, $-1-k=k\Leftrightarrow -1=2k\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$.

11. Tem-se que:

- $h'(x)=\left(\operatorname{sen}^2 x-2\cos x\right)'=2\operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen} x\right)'+2\operatorname{sen} x=\underbrace{2\operatorname{sen} x\cos x}_{\operatorname{sen}(2x)}+2\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen} x$

- $h''(x)=\left(\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen} x\right)'=(2x)'\cos(2x)+2\cos x=2\cos(2x)+2\cos x$

- $h''(x)=0\Leftrightarrow 2\cos(2x)+2\cos x=0\Leftrightarrow \cancel{2}\cos(2x)=-\cancel{2}\cos x\Leftrightarrow \cos(2x)=\underbrace{-\cos x}_{\cos(\pi+x)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos(\pi+x)\Leftrightarrow 2x=\pi+x+2k\pi \ \vee\ 2x=-(\pi+x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee\ 2x=-\pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee\ 3x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow x=\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}$; $\pi \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=1 \rightarrow x=3\pi \ \vee \ x=\pi$; $3\pi \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\pi \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=2 \rightarrow x=$ _____ $\vee \ x=\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=-1 \rightarrow x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}$; $-\pi \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Portanto, os zeros de h'' são $\frac{\pi}{3}$ e π.

Outra maneira de resolver a equação $h''(x)=0$:

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)+2\cos x=0 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} \underbrace{\cos(2x)}_{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1-\cos^2 x}+\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-1+\cos^2 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1 \ \vee \ \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow x=\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3} \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}$; $\pi \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{\pi}{3} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=1 \rightarrow x=3\pi \ \vee \ x=\frac{7\pi}{3} \ \vee \ x=\frac{5\pi}{3}$; $3\pi \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{7\pi}{3} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $\frac{5\pi}{3} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=-1 \rightarrow x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{5\pi}{3} \ \vee$ _____ ; $-\pi \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{5\pi}{3} \notin \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Portanto, os zeros de h'' são $\frac{\pi}{3}$ e π.

Elaborando um quadro de sinal de h'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de h, vem:

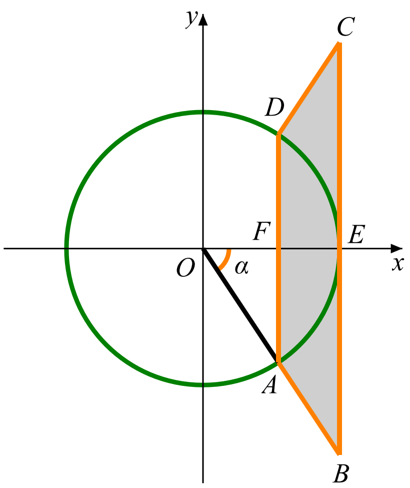
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$h''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
Gráfico de h		$\cup$	p.i.	$\cap$		$\cap$	

Nota: $h''(0)=2\cos(0)+2\cos(0)=2\times1+2\times1=4\Rightarrow h''(0)>0$; $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(\pi)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times(-1)+2\times0=-2\Rightarrow h''\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$; $h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos(3\pi)+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\times(-1)+2\times0=-2\Rightarrow h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0$.

Logo, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ e tem um único ponto de inflexão em $x=\frac{\pi}{3}$.

Como $h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$, as coordenadas do ponto de inflexão são $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{1}{4}\right)$.

12. Consideremos a seguinte figura, em que F é o ponto de interseção do lado $[AD]$ com o eixo Ox.



A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}$.

Como $\overline{AD}=2\overline{AF}$, $\overline{BC}=2\overline{BE}$ e $\overline{EF}=1-\overline{OF}$, tem-se que:

$$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}=\frac{2\overline{AF}+2\overline{BE}}{2}\times\left(1-\overline{OF}\right)=$$

$$=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)$$

As coordenadas do ponto A são $(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha>0$ e $\operatorname{sen}\alpha<0$, e as do ponto B são $(1,\operatorname{tg}\alpha)$, com $\operatorname{tg}\alpha<0$. Assim, $\overline{AF}=-\operatorname{sen}\alpha$, $\overline{BE}=-\operatorname{tg}\alpha$ e $\overline{OF}=\cos\alpha$ e, portanto:

$$A_{[ABCD]}=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)=(-\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=$$

$$= -\operatorname{sen}\alpha + \frac{\overbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2} - \operatorname{tg}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \times \cancel{\cos\alpha} = \cancel{-\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} - \operatorname{tg}\alpha + \cancel{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} - \operatorname{tg}\alpha$$

13. Tem-se que $\lim u_n = \lim\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim\left(\left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\lim\left(1-\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{e^{-k}}{e^k}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(e^{-2k}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2k}{3}}$.

Logo, $\lim f(u_n) \underset{f \text{ é contínua em } \mathbb{R}^+}{=} f(\lim u_n) = f\left(e^{-\frac{2k}{3}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{2k}{3}}\right) = -\frac{2k}{3}$.

Portanto, $\lim f(u_n) = 1-k \Leftrightarrow -\frac{2k}{3} = 1-k \Leftrightarrow -\frac{2k}{3} + k = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$.

Resposta: C

14. Tem-se que $\lim w_n = \lim(\ln(n) - \ln(n+1)) = \lim\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \ln\left(\lim\frac{n}{n+1}\right) \underset{\substack{n<n+1,\ \forall n\in\mathbb{N} \\ \Downarrow \\ \frac{n}{n+1}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}}}{=} \ln\left(1^-\right) = 0^-$.

Logo, $\lim(1-w_n) = 1 - \lim w_n = 1 - 0^- = 1^+$, pelo que $\lim(1-w_n) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

Resposta: D

15.

(I) A reta de equação $y+3=2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, pelo que o ponto de coordenadas $(2, f(2))$ pertence a esta reta.

Assim, $f(2)+3 = 2\times 2 \Leftrightarrow f(2) = 4-3 \Leftrightarrow f(2) = 1$.

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então também é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, também é contínua em $x=2$, pelo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 1$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(e^{x-2}(f(x)+1)\right) = \lim\limits_{x\to 2} e^{x-2} \times \lim\limits_{x\to 2}(f(x)+1) = e^{2-2} \times \left(\lim\limits_{x\to 2} f(x) + 1\right) = e^0 \times (1+1) = 2$.

$\therefore$ A afirmação **(I)** é falsa.

(II) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e 1 é um mínimo absoluto de f', $f'(x) \geq 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, o que implica que $f'(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, pelo que f é crescente em $\mathbb{R}$.

$\therefore$ A afirmação **(II)** é falsa.

(III) Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x\right) = 0$, a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando x tende para $-\infty$, pelo que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x-2}\left(f(x)+1\right)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-2} \times \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)+1}{x} = e^{-\infty} \times \left(\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \right) =$

$$= 0 \times \left(2 + \frac{1}{-\infty} \right) = 0 \times (2 + 0) = 0$$

Logo, como $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, se o gráfico de g tiver assíntota, quando x tende para $-\infty$, será horizontal, pelo que não pode ter assíntota oblíqua, quando x tende para $-\infty$.

$\therefore$ A afirmação **(III)** é falsa.

FIM