Avaliação – Itens para testes de avaliação

Matemática A | 12.º Ano

Tópicos: Funções

1. Considera que para cada k real, a seguinte expressão, definida por ramos, define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{e^{x+1}}-1} & \text{se} \quad x<-1\\[2ex] e^{kx}\left(x^2-4x+1\right) & \text{se} \quad x\geq -1\end{cases}$$

1.1 Determina o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{e^{2x}}$, para o caso em que $k<1$.

1.2 Verifica se existe algum k de modo que a função g seja contínua em $x=-1$.

1.3 Considera $k=-1$.

Estuda, para $x\in\left]-1,+\infty\right[$, a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na tua resposta deves deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

2. Sejam a e x dois números reais, com $a>0$, tais que $\log_5 a = x$.

A expressão $\log_5\left(\dfrac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)$ é equivalente a:

(A) $-x^2+\dfrac{3x}{2}-1$

(B) $\dfrac{x}{2}-1$

(C) $x^2-\dfrac{3x}{2}+1$

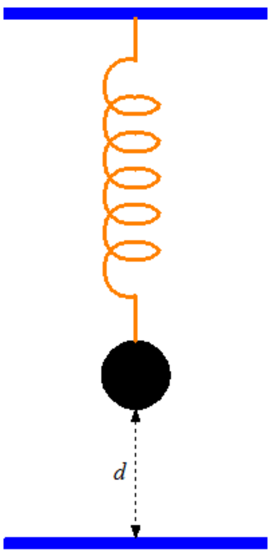
(D) $-\dfrac{x}{2}+1$

3. Sejam f e g duas funções, de domínio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, respetivamente, tais que:

- f é contínua em $\mathbb{R}$;
- $f(0) = f(1) = 3$ e $0 < f(3) < 1$;
- $g(x) = \log_3 x$.

Mostra que a equação $(g \circ f)(x) = (f \times g)(x)$ é possível no intervalo $]1,3[$.

4. Na figura, está representada uma esfera suspensa numa mola que oscila verticalmente.



Admite que a distância, em centímetros, a que a esfera se encontra do solo, t segundos após o início do movimento oscilatório, é dada pela função d, definida por:

$$d(t) = 3 + 3{,}5e^{-0{,}31t}\,\text{sen}\left(\frac{8\pi t}{3}\right), \text{ com } t \geq 0$$

4.1 Admite que, no início do movimento, a distância do centro da esfera ao solo é de $3{,}5$ cm.

Qual é, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera?

A $\frac{\pi}{6}$ **B** $\frac{\pi}{4}$ **C** $\frac{\pi}{3}$ **D** $\frac{\pi}{2}$

4.2 Durante o terceiro segundo de movimento, existem exatamente dois instantes tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15%.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determina esse instante.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerares necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s), com três casas decimais;
- apresentar os instantes pedidos, em segundos, arredondado às décimas.

5. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2 \ln x - 2$.

5.1 Verifica se o gráfico da função f tem alguma assíntota vertical. Se tiver, indica a(s) sua(s) equação(ões).

5.2 Determina o conjunto-solução da equação $f(x) + x^2 = 2\ln x$.

5.3 Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta deves:

- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo;
- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

6. Considera a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \cos^2(2x) - 2$ e um número real a pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

A que é igual $\lim\limits_{x \to a} \frac{x - a}{h(a) - h(x)}$?

A $\frac{1}{2\,\text{sen}(2a)}$

B $\frac{1}{2\,\text{sen}(4a)}$

C $-\frac{1}{2\,\text{sen}(4a)}$

D $-\frac{1}{2\,\text{sen}(2a)}$

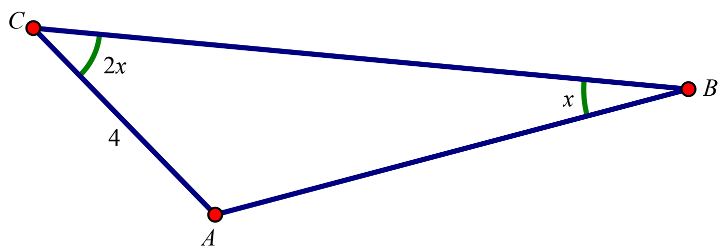
7. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, respetivamente, tais que:

- f é diferenciável em $\mathbb{R}$;
- a função f tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1;
- $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{1-\cos^2(2x)} & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{2x+f(x)}{x+2} & \text{se} \quad x>0\end{cases}$;
- existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

7.1 Qual é o valor de $f(0)$?

7.2 Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

8. Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC}=4$;
- a amplitude, em radianos, do ângulo CBA é x e a do ângulo ACB é $2x$, com $x\in\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$.

Mostra que a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AB]$ é dada por:

$$12\operatorname{sen}x-16\operatorname{sen}^3 x$$

9. Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da condição:

$$\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(\sqrt{x}\right)$$

Apresenta o conjunto na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

10. Para um certo valor real de $k > -1$, a função g, de domínio $[-1,+\infty[$, é contínua.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x e^{x-k}-k}{\operatorname{sen}(k-x)} & \text{se} \quad -1 \leq x < k \\ \\ x & \text{se} \quad x \geq k \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

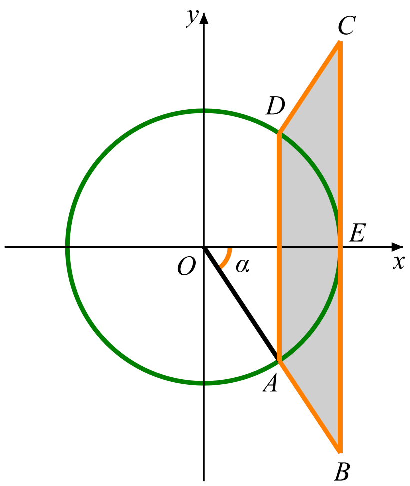
11. Considera a função h, de domínio $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, definida por $h(x)=\operatorname{sen}^2 x - 2\cos x$.

Estuda a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta, indica/apresenta:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

12. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência trigonométrica e ao eixo Ox;
- os pontos A e D pertencem à circunferência trigonométrica e são simétricos em relação ao eixo Ox;
- a reta BC é tangente à circunferência trigonométrica no ponto E;
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox e o ponto B pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo EOA, com $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$.

Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função, de α por $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}-\operatorname{tg}\alpha$.

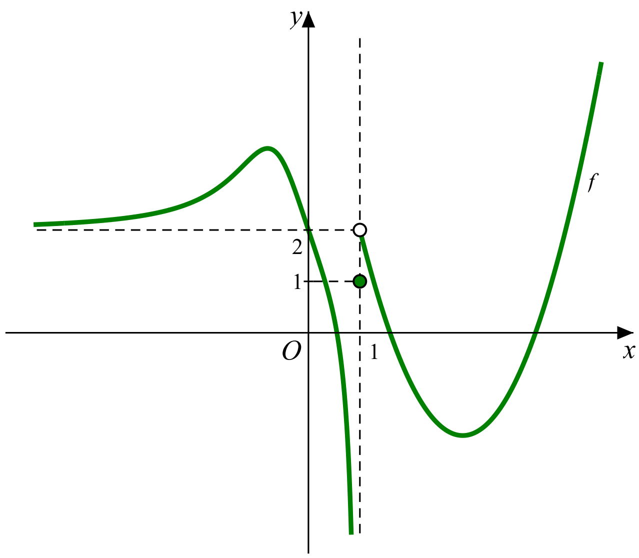
Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

13. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\dfrac{n-k}{n+k}\right)^{\frac{n}{3}}$, com $k \in \mathbb{R}^+$ e a função f , definida em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \ln x$.

Sabendo que $\lim f(u_n) = 1-k$, qual é o valor de k ?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

14. Na figura está representado, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.



Tal como a figura sugere, as retas de equações $y=2$ e $x=1$ são assíntotas ao gráfico de f e $f(1)=1$.

Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = \ln(n) - \ln(n+1)$

Qual é o valor de $\lim f(1-w_n)$?

A $-\infty$

B 0

C 1

D 2

15. Sejam f e g duas funções diferenciáveis de domínio $\mathbb{R}$, relativamente às quais se sabe que:

- a reta de equação $y+3=2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2;
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$;
- 1 é o mínimo absoluto de f';
- $g(x)=e^{x-2}\left(f(x)+1\right)$.

Considera as seguintes afirmações.

(I) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=1$.

(II) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$.

(III) O gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$.

Justifica que as três afirmações são falsas.

Na tua resposta, apresenta, para cada uma das afirmações, uma razão que justifica a sua falsidade.

FIM

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta