Propostas de resolução

1.1 Como o número tem de ser ímpar, o algarismo das unidades tem de ser ímpar, pelo que para esta posição temos 5 possibilidades. Como o primeiro algarismo não pode ser o 0, restam três posições para colocar os dois zeros, o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_2$. Finalmente, sobram duas posições que têm de ser ocupadas por dois algarismos distintos entre si, distintos de 0 e do algarismo que foi colocado na posição das unidades. Assim, dos restantes oito algarismos, escolhem-se, ordenadamente, dois para as duas posições que sobram. O número de maneiras de o fazer é ${}^8A_2$.

Logo, a resposta é $5 \times {}^3C_2 \times {}^8A_2 = 840$.

Resposta: A

1.2 Para formarmos um número de cinco algarismos, temos de escolher cinco entre os dez algarismos disponíveis e, em seguida, distribuir os cinco algarismos pelas cinco posições. Contudo, se queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente ou decrescente, depois de os escolher, há apenas uma maneira de os distribuir para cada um dos casos (crescente ou decrescente). Por exemplo, se escolhermos os algarismos 1, 4, 6, 7 e 9, forma-se o número $14\ 679$, no caso de ficarem por ordem crescente, e forma-se o número $97\ 641$, no caso de ficarem por ordem decrescente.

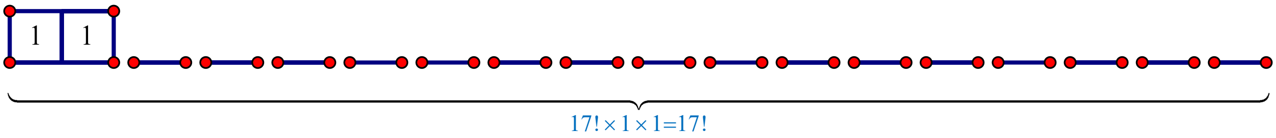
Assim:

- existem ${}^9C_5$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem crescente. O algarismo 0 não pode ser escolhido, dado que como queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente, o 0 teria de ir para a primeira posição, pelo que o número não teria cinco algarismos, mas sim quatro. Portanto, dos restantes nove algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^9C_5 \times 1 = {}^9C_5$ números nestas condições;

- existem ${}^{10}C_5$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem decrescente. Dos dez algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^{10}C_5 \times 1 = {}^{10}C_5$ números nestas condições.

Logo, existem ${}^9C_5 + {}^{10}C_5 = 378$ números de cinco algarismos em que os seus algarismos estão dispostos por ordem crescente ou por ordem decrescente.

2.1 Agrupando os dois vasos num bloco, este bloco e as restantes dezasseis peças perfazem dezassete peças a permutar. Dado que os vasos são iguais, permutando os dois dentro do bloco não gera uma nova disposição, pelo que a resposta ao problema é $17!$.



2.2 Existem dezassete peças distintas (os dois vasos são iguais, pelo que consideramos apenas um para formar um conjunto de seis peças distintas). Assim, das dezassete peças escolhem-se seis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{17}C_6$.

Portanto, existem ${}^{17}C_6 = 12\,376$ maneiras distintas de escolher seis peças distintas para a exposição.

2.3 Começamos por escolher a fila horizontal onde se vão colocar os dois vasos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_1 = 4$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}C_2$ maneiras distintas de escolher dois compartimentos, entre os seis da fila horizontal escolhida, para os dois vasos. Finalmente, como na fila onde ficam os vasos não podem estar outras peças, dos restantes dezoito compartimentos escolhem-se, ordenadamente, dezasseis para colocar as restantes peças. O número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A_{16}$.

Logo, uma expressão que permite determinar o número de disposições possíveis é $4 \times {}^{6}C_2 \times {}^{18}A_{16}$.

3. Sejam n o número de cartas vermelhas em cima da mesa e p o número de cartas pretas em cima da mesa (n e p naturais).

Tem-se:

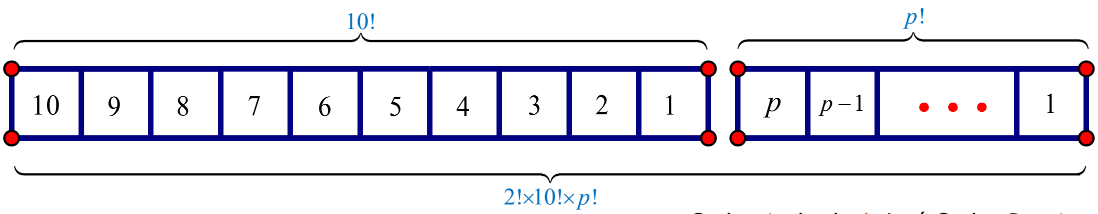
- o número de maneiras de formar um conjunto de duas cartas vermelhas entre as n é dado por ${}^{n}C_2$.

Logo, $${}^{n}C_2 = 45 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-90)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{2} \Leftrightarrow n = -9 \ \vee \ n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 10$, pelo que foram colocadas em cima da mesa dez cartas vermelhas.

- agrupando num bloco as dez cartas vermelhas e agrupando num outro bloco as p cartas pretas, vem:

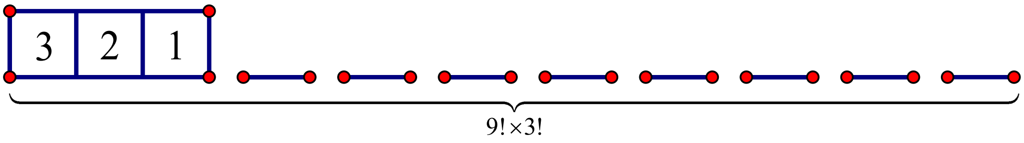


Os dois blocos permutam entre si de $2!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, as dez cartas vermelhas permutam entre si de $10!$ maneiras distintas e as p cartas pretas permutam entre si de $p!$ maneiras distintas. Portanto, o número de maneiras de colocar as cartas em fila de modo que as cartas da mesma cor fiquem em posições consecutivas é dado por $2!\times 10!\times p!$.

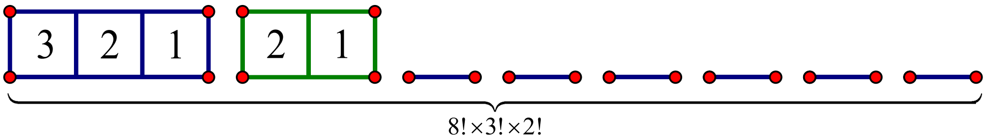
Logo, $2!\times 10!\times p! = 174\,182\,400 \Leftrightarrow p! = \dfrac{174\,182\,400}{2!\times 10!} \Leftrightarrow p! = 24 \Leftrightarrow p = 4$

$\therefore$ Em cima da mesa foram colocadas catorze cartas, dez vermelhas e quatro pretas.

4. Vamos começar por contar todos os casos em que os onze amigos se colocam numa só fila, com a Inês, a Sofia e a Maria em posições consecutivas. Para tal, agrupamos as três num bloco. Esse bloco e os restantes oito amigos permutam entre si de $9!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três permutam entre si de $3!$ maneiras distintas:

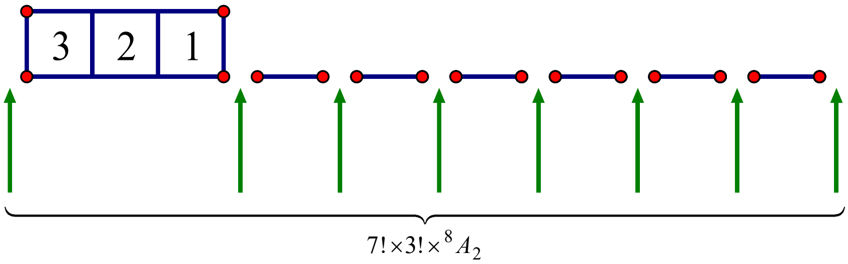


Em seguida, retiramos todos os casos em que os onze amigos se colocam numa só fila, com a Inês, a Sofia e a Maria em posições consecutivas, assim como o Pedro o João em posições consecutivas. Para tal, agrupamos a Inês, a Sofia e a Maria num bloco e também agrupamos o Pedro e o João num outro bloco. Esses dois blocos e os restantes seis amigos permutam entre si de $8!$ maneiras distintas. Dentro do bloco das raparigas, as três permutam entre si de $3!$ maneiras distintas e dentro do bloco dos rapazes, os dois permutam entre si de $2!$ maneiras distintas:



Logo, a resposta a este problema é $9!\times 3! - 8!\times 3!\times 2! = 1\,693\,440$.

Outra resolução: Comecemos por agrupar num bloco a Inês, a Sofia e a Maria. Como o Pedro e o João não podem ficar juntos, então têm de ocupar duas das oito posições entre os restantes seis amigos e o bloco, ou nas pontas. Essas posições que podem ser ocupadas pelo Pedro e pelo João estão assinaladas com as setas verdes na figura seguinte:



Assim, o bloco e os restantes seis amigos permutam entre si de $7!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três raparigas permutam entre si de $3!$ maneiras distintas. Finalmente, das oito posições que o Pedro e o João podem ocupar, escolhem-se, ordenadamente, duas. O número de maneiras de o fazer é ${}^{8}A_2$.

Portanto, a resposta ao problema é $7! \times 3! \times {}^{8}A_2 = 1\,693\,440$.

Resposta: A

5.1 Para determinar o número de grupos que é possível formar nas condições do enunciado, temos de considerar dois casos disjuntos:

- o grupo tem uma pessoa do sexo masculino e três do sexo feminino: ${}^{3}C_1 \times {}^{9}C_3$ (das três pessoas do sexo masculino escolhe-se uma, ${}^{3}C_1$, e das nove do sexo feminino escolhem-se três, ${}^{9}C_3$);

- o grupo tem duas pessoas do sexo masculino e duas do sexo feminino: ${}^{3}C_2 \times {}^{9}C_2$ (das três pessoas do sexo masculino escolhem-se duas, ${}^{3}C_2$, e das nove do sexo feminino escolhem-se duas, ${}^{9}C_2$).

Logo, o número de grupos que é possível formar nas condições do enunciado é ${}^{3}C_1 \times {}^{9}C_3 + {}^{3}C_2 \times {}^{9}C_2 = 360$.

5.2 Vamos começar por escolher os membros que irão desempenhar os cargos. Para tal, vamos considerar dois casos disjuntos:

- irão desempenhar os cargos uma pessoa do sexo masculino e duas do sexo feminino: ${}^{3}C_1 \times {}^{9}C_2 \times 3!$ (das três pessoas do sexo masculino escolhe-se uma, ${}^{3}C_1$, e das nove do sexo feminino escolhem-se duas, ${}^{9}C_2$. Finalmente, permutam-se os três membros escolhidos pelos três cargos, o número de maneiras de o fazer é $3!$);

- irão desempenhar os cargos duas pessoas do sexo masculino e uma do sexo feminino: ${}^{3}C_2 \times {}^{9}C_1 \times 3!$ (das três pessoas do sexo masculino escolhem-se duas, ${}^{3}C_2$, e das nove do sexo feminino escolhe-se uma, ${}^{9}C_2$. Finalmente, permutam-se os três membros escolhidos pelos três cargos, o número de maneiras de o fazer é $3!$);

Assim, para desempenhar os cargos, temos ${}^{3}C_1 \times {}^{9}C_2 \times 3! + {}^{3}C_2 \times {}^{9}C_1 \times 3!$ possibilidades distintas. Para cada uma destas maneiras, falta contabilizar o número de maneiras de escolher os restantes membros da comissão. Portanto, dos restantes nove membros, escolhem-se quatro. Como os quatro irão desempenhar tarefas indiferenciadas, o número de maneiras de os escolher é ${}^{9}C_4$.

Logo, a resposta a este problema é $\left({}^{3}C_1 \times {}^{9}C_2 \times 3! + {}^{3}C_2 \times {}^{9}C_1 \times 3!\right) \times {}^{9}C_4 = 102\,060$.

6. Vamos começar por considerar dois casos:

Números naturais entre 19999 e 50000, excluindo estes, com todos os algarismos pares: 2×5^4

Para o algarismo da primeira posição (dezenas de milhares) temos duas possibilidades, 2 ou 4. Para cada um dos restantes quatro algarismos temos cinco possibilidades, 0, 2, 4, 6 ou 8.

Números naturais entre 19999 e 50000, excluindo estes, com todos inferiores a 8: 3×8^4

Para o algarismo da primeira posição (dezenas de milhares) temos três possibilidades, 2, 3 ou 4. Para cada um dos restantes quatro algarismos temos oito possibilidades, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.

No entanto, estes dois casos não são disjuntos, pelo que temos de retirar os casos comuns, isto é, os casos em todos os algarismos são pares e inferiores a 8: 2×4^4

Para o algarismo da primeira posição (dezenas de milhares) temos duas possibilidades, 2 ou 4. Para cada um dos restantes quatro algarismos temos quatro possibilidades, 0, 2, 4, ou 6.

Logo, pelo princípio da inclusão-exclusão, o número pedido é $2\times 5^4+3\times 8^4-2\times 4^4=13026$.

7.1 Para escolher dois dos onze pontos assinalados que definam uma reta paralela ao plano xOy, temos de escolher dois dos seis pontos assinalados na face $[EFHG]$ ou dois dos quatro pontos assinalados na face $[ABCD]$. Assim, o número pedido é ${}^6C_2+{}^4C_2=21$.

7.2 Para que escolher três dos onze pontos assinalados que definam um plano que contenha a aresta $[BC]$, temos de escolher:

- três pontos da face $[ABCD]$ -, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$;

- tês pontos do retângulo $[BCEF]$ -, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$;

- três pontos da face $[BCHG]$- o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_3$. No entanto, entre estas escolhas, há duas que não definem um plano, por serem escolhas com de pontos não colineares: C, P e G; B, P e H. Logo, para este caso, temos ${}^5C_3-2$ possibilidades.

Portanto, o número pedido é ${}^4C_3+{}^4C_3+{}^5C_3-2=16$.

8. $12\times 4!\times {}^{11}C_5\times {}^{6}A_3$

As bolas de futebol podem ser colocadas de 12 maneiras distintas, ocupando as posições 1 a 4, ou 2 a 5, ou 3 a 6, ou 4 a 7, ou 5 a 8, ou 6 a 9, ou 7 a 10, ou 8 a 11, ou 9 a 12, ou 10 a 13, ou 11 a 14, ou 12 a 15. Para cada uma destas maneiras, as bolas de futebol permutam entre si de $4!$ maneiras distintas. Das onze posições restantes, escolhem-se cinco para as cinco bolas de ténis, que são indistinguíveis; o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}C_5$. Finalmente, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}A_3$ formas distintas de escolher, ordenadamente, três posições entre as restantes seis para as três bolas de basquetebol.

9.1 $u_{20}=2\times(-1)^{20+1}-2\times 20=2\times(-1)^{21}-40=2\times(-1)-40=-2-40=-42$

9.2 $2\times(-1)^{n+1}$ só toma dois valores, -2 se n é ímpar e 2 se n é par. Assim, como $-2n\leq -2$, para todo o $n\in\mathbb{N}^+$, $2\times(-1)^{n+1}-2n\leq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}^+$, pelo que a sucessão (u_n) não tem termos positivos.

10.1 $u_n=-4\Leftrightarrow \dfrac{2-5n}{n+7}=-4 \underset{\substack{n+7\neq 0\\ \forall n\in\mathbb{N}^+}}{\Leftrightarrow} 2-5n=-4(n+7)\Leftrightarrow 2-5n=-4n-28\Leftrightarrow -5n+4n=-28-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -n=-30\Leftrightarrow n=30$

Logo, -4 é o termo de ordem 30 da sucessão (u_n).

10.2 Tem-se que:

- $w_2=8u_1-w_1=8\times\dfrac{2-5\times 1}{1+7}-a=\cancel{8}\times\dfrac{-3}{\cancel{8}}-a=-3-a$;
- $w_3=8u_2-w_2=8\times\dfrac{2-5\times 2}{2+7}-(-3-a)=8\times\dfrac{-8}{9}+3+a=-\dfrac{64}{9}+3+a=-\dfrac{37}{9}+a$.

Logo, como $w_3=-\dfrac{55}{9}$, tem-se $w_3=-\dfrac{55}{9}\Leftrightarrow -\dfrac{37}{9}+a=-\dfrac{55}{9}\Leftrightarrow a=-\dfrac{55}{9}+\dfrac{37}{9}\Leftrightarrow a=-\dfrac{18}{9}\Leftrightarrow a=-2$

Resposta: A

11.1 Como (u_n) é uma progressão aritmética, e sendo r a sua razão, tem-se:

$$u_{12}+u_{13}+u_{14}+u_{15}+u_{16}=\frac{u_{12}+u_{16}}{2}\times 5\underset{\substack{u_{12}=u_8+4r\\ u_{16}=u_{20}-4r}}{=}\frac{u_8+\cancel{4r}+u_{20}-\cancel{4r}}{2}\times 5=\frac{u_8+u_{20}}{2}\times 5\underset{u_8+u_{20}=11}{=}\frac{11}{2}\times 5=\frac{55}{2}$$

Resposta: C

11.2 Sendo r a razão da progressão aritmética (u_n), tem-se que:

- $u_8 = u_{12} - 4r = 5 - 4r$;
- $u_{20} = u_{12} + 8r = 5 + 8r$.

Assim, como $u_8 + u_{20} = 11$, vem que $u_8 + u_{20} = 11 \underset{\substack{u_8 = 5-4r \\ u_{20} = 5+8r}}{\Leftrightarrow} 5 - 4r + 5 + 8r = 11 \Leftrightarrow 4r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$.

Portanto, o termo geral de (u_n) é dado por

$$u_n = u_{12} + (n-12) \times r = 5 + (n-12) \times \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{4}n - 3 = \frac{1}{4}n + 2$$

12. Seja r a razão da progressão geométrica (w_n).

Assim, para todo o $n \in \mathbb{N}^+$, tem-se $w_{n+3} = w_n \times r^3$, pelo que:

$$w_{n+3} + w_n = 0 \Leftrightarrow w_n \times r^3 + w_n = 0 \Leftrightarrow w_n \left(r^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow w_n = 0 \ \vee \ r^3 + 1 = 0$$

Como $w_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$, vem que $\underbrace{w_n = 0}_{\text{Impossível}} \ \vee \ r^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^3 = -1 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow r = -1$.

Logo, a soma dos 2026 primeiros termos de (w_n) é dada por:

$$w_1 \times \frac{1 - r^{2026}}{1 - r} = w_1 \times \frac{1 - (-1)^{2026}}{1 - (-1)} \underset{(-1)^{2026} = 1}{=} w_1 \times \frac{1 - 1}{2} = w_1 \times 0 = 0$$

Resposta: B

13. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n).

Assim, $u_5 = u_2 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{1}{9} = 3 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$. Logo, como $0 < \frac{1}{3} < 1$, a soma de todos os termos da progressão geométrica (u_n) é finita.

Tem-se que $u_2 = u_1 \times r$, ou seja, $3 = u_1 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow u_1 = 9$, pelo que a soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$. Como $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tende para 0, à medida que n toma valores tão grandes quanto se queira, a soma de todos os termos de (u_n) é $\frac{27}{2} \times (1 - 0) = \frac{27}{2}$.

14.1 Seja r a razão da progressão aritmética (u_n).

Assim, $u_8 = u_2 + 6r$, pelo que $u_2 = u_8 + 12 \Leftrightarrow \cancel{u_2} = \cancel{u_2} + 6r + 12 \Leftrightarrow -6r = 12 \Leftrightarrow r = -2$.

14.2

a) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3 se $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que $v_n = \frac{3^{u_n}}{27^{-n}} = \frac{3^{u_n}}{\left(3^3\right)^{-n}} = \frac{3^{u_n}}{3^{-3n}} = 3^{u_n + 3n}$.

Dado que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -2, então $u_{n+1} - u_n = -2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{u_{n+1}+3(n+1)}}{3^{u_n+3n}} = 3^{u_{n+1}+\cancel{3n}+3-u_n-\cancel{3n}} = 3^{u_{n+1}-u_n+3} \underset{u_{n+1}-u_n=-2,\ \forall n\in\mathbb{N}}{=} 3^{-2+3} = 3$.

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

b) A soma dos dez primeiros termos de (v_n) é dada por $v_1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = v_1 \times \frac{-59048}{-2} = 29524 v_1$.

Logo, $29524 v_1 = 118096 \Leftrightarrow v_1 = \frac{118096}{29524} \Leftrightarrow v_1 = 4$.

Portanto, o termo geral de (v_n) é dado por $v_n = v_1 \times 3^{n-1} = 4 \times \frac{3^n}{3} = \frac{4}{3} \times 3^n$. Como a razão da progressão geométrica (v_n) é 3 e $3 > 1$, e como $v_1 = 4 > 0$, a sucessão é crescente.

15. A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $n^2 + \frac{3n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}^+$, ou seja:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n^2 + \frac{3n}{2}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}^+$$

Logo:

- $u_1 = 1^2 + \frac{3 \times 1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ (a soma, para $n = 1$, corresponde ao primeiro termo);
- $u_1 + u_2 = 2^2 + \frac{3 \times 2}{2} \underset{u_1 = \frac{5}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{5}{2} + u_2 = 4 + 3 \Leftrightarrow u_2 = 7 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow u_2 = \frac{9}{2}$.

Assim, sendo r a razão da progressão aritmética (u_n), tem-se $r = u_2 - u_1 = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Portanto, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{5}{2} + 2n - 2 = 2n + \frac{1}{2}$.

Outra resolução:

A soma dos n primeiros termos de (u_n) é dada por $n^2 + \frac{3n}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n^2 + \frac{3n}{2} \text{, para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Logo, $n^2 + \frac{3n}{2} = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \left(n + \frac{3}{2}\right) \times n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{2n+3}{2} \times n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$, pelo que:

$$u_1 + u_n = 2n + 3 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + r(n-1) = 2n + 3 \Leftrightarrow 2u_1 + rn - r = 2n + 3$$

Sendo $2u_1 - r$ constante, tem-se:

$$\begin{cases} r = 2 \\ 2u_1 - r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 2u_1 - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Portanto, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = \frac{5}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{5}{2} + 2n - 2 = 2n + \frac{1}{2}$.

FIM