

1.1. Opção (D)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

1.2. A área do triângulo $[ABC]$ é dada pela seguinte expressão:

$$A_{[ABC]} = \frac{|x_B - x_A| \times y_C}{2}$$

$$x_B = -\frac{\pi}{4} \text{ (pois, para } k = -1, \text{ temos: } x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \text{)}$$

$$x_A = -\frac{3\pi}{4} \text{ (pois, para } k = -2, \text{ temos: } x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \text{)}$$

$$y_C = 2 \text{ (pois, se } -1 \leq \sin x \leq 1, \text{ então: } 2 \leq \sin x + 3 \leq 5 \text{)}$$

$$\text{Logo: } A_{[ABC]} = \frac{\frac{\pi}{2} \times 2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2. Opção (A)

O ângulo é agudo se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow -2 \times 1 + 1 \times (k^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow k^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

3.1. Opção (B)

3.2. O vetor de coordenadas $(0, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta r , logo é um vetor normal ao plano α .

$$\text{Logo } \alpha: y + z + d = 0$$

Como o plano passa na origem do referencial, então $d = 0$.

Portanto:

$$\alpha: y + z = 0$$

3.3. Seja s a reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto Q .

A reta s pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta s com o plano α são da forma $(1, 2+k, 3+k)$.

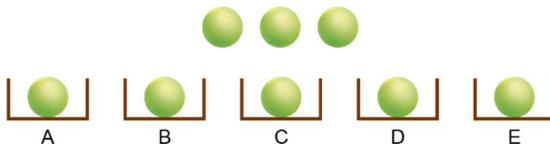
Como o ponto pertence ao plano α :

$$2 + k + 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{2}$$

Substituindo, obtêm-se as coordenadas do ponto de interseção da reta s com o plano α : $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Finalmente, a distância do ponto Q ao plano α é igual a $\sqrt{(1-1)^2 + \left(2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4.1.



Após cada caixa ter uma bola existem três casos a considerar para a distribuição das restantes três bolas pelas cinco caixas.

1.º caso: As três bolas irão para a mesma caixa.

Existem cinco formas de colocar as três bolas na mesma caixa.

2.º caso: Duas bolas irão para uma caixa e a terceira bola irá para outra.

Existem $5 \times 4 = {}^5A_2$ formas de colocar duas bolas numa caixa e a terceira bola noutra caixa.

3.º caso: Cada bola do conjunto de três irá para uma caixa diferente.

Existem 5C_3 formas de colocar cada bola numa caixa diferente.

Logo, o número total de maneiras de distribuir as oito bolas pelas cinco caixas, de modo que cada caixa tenha, pelo menos, uma bola é igual a $5 + {}^5A_2 + {}^5C_3$.

4.2. Para que as caixas identificadas com uma vogal tenham mais bolas do que as caixas identificadas com uma consoante, duas das três bolas irão para a caixa A e uma irá para a caixa E ou vice-versa.

Existem, assim, duas maneiras de distribuir as bolas, de modo que as caixas identificadas com uma vogal tenham mais bolas do que as caixas identificadas com uma consoante.

5.1. Opção (A)

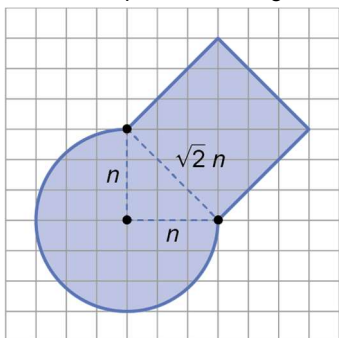
5.2. Existem 50 001 números compreendidos entre 10 000 e 60 000, inclusive, dos quais 25 001 são pares e 25 000 são ímpares,

Existem ${}^{25000}C_2$ formas de se obter um produto ímpar logo existem ${}^{50001}C_2 - {}^{25000}C_2 = 937537500$ formas de se obter um produto par.

6.1. O comprimento do arco de circunferência da 8.ª figura é igual a:

$$\frac{3}{4} \times 2\pi \times 8 = \frac{48\pi}{4} = 12\pi$$

6.2. O lado do quadrado da figura de ordem n é igual a $\sqrt{2}n$.

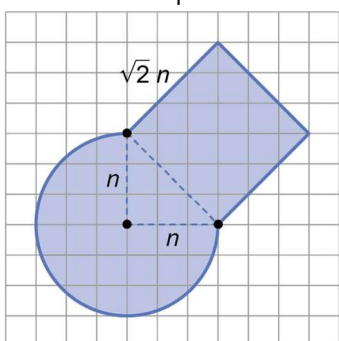


$$\text{Logo: } \sqrt{2}n = \sqrt{288} \Leftrightarrow n = \sqrt{144} \Leftrightarrow n = 12$$

A figura em que o lado do quadrado mede $\sqrt{288}$ é a figura de ordem 12.

6.3. Na figura de ordem n , sabemos que:

- o raio da circunferência mede n ;
- o lado do quadrado mede $\sqrt{2}n$.



Assim, a medida da área da figura de ordem n é igual a:

$$\frac{3}{4} \times \pi n^2 + \frac{n^2}{2} + (\sqrt{2}n)^2 = \frac{3\pi n^2 + 2n^2 + 8n^2}{4} = \frac{(3\pi + 10)n^2}{4}$$

7.1. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tem-se:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3-4(n+1)}{2} - \frac{3-4n}{2} = \frac{3-4n-4-3+4n}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Logo, (u_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -2$.

7.2. $v_{n+1} = \frac{4}{2^{n+1}} = \frac{4}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2} \times v_n$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$, pode concluir-se que a sucessão (v_n) é uma progressão

geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$. $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$.

$$v_1 = \frac{4}{2^1} = 2$$

Assim, a sucessão (v_n) pode ser definida por recorrência da seguinte forma:

$$v_n = \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

7.3. A soma dos n primeiros termos da sucessão (v_n) é dada pela expressão:

$$S_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

A soma de todos os termos da sucessão (v_n) é:

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

8.1. Os pontos A e C têm abcissa 4, logo:

$$y_C = f(4) = -0,1 \times 4^3 + 0,6 \times 4^2 = 3,2$$

A abcissa do ponto B é uma das soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(-0,1x + 0,6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6.$$

Então, as coordenadas dos vértices do papagaio $[OABC]$ são:

$$O(0, 0), A(4; -3,2), B(6, 0) \text{ e } C(4; 3,2)$$

8.2. A equação reduzida da reta OC é $y = 0,8x$.

Logo, a abcissa do ponto P é uma das soluções da equação $f(x) = 0,8x$.

$$f(x) = 0,8x \Leftrightarrow -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,8x = 0 \Leftrightarrow x(-0,1x^2 + 0,6x - 0,8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee -0,1x^2 + 0,6x - 0,8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4 \times (-0,1) \times (-0,8)}}{2 \times (-0,1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$$

Então, $x_P = 2$.

$$\text{Logo, } y_P = f(2) = -0,1 \times 2^3 + 0,6 \times 2^2 = 1,6.$$

As coordenadas do ponto P são $(2; 1,6)$

9. Opção (A)