Teste de Matemática A

2025 / 2026

Teste N.º 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Domínio 12 | Daniela Raposo e Luzia Gomes
Com a colaboração de Daniela Breda

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\ \cos b+\operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $\quad (k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'\ (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\ln a\quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad (p\in\mathbb{R})$

1. A soma dos três primeiros elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é 121.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de esses dois elementos serem iguais?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{10}$ **(D)** $\frac{1}{15}$

2. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

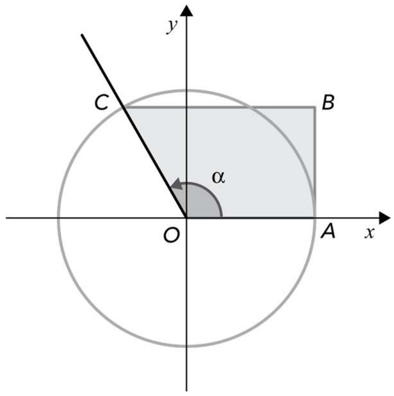
Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(B) = 0{,}4$;
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}3$.

Determine o valor de $P(\bar{A}\,|B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, uma circunferência centrada na origem e de raio 2, e o trapézio $[ABCO]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à reta de equação $x = 2$;
- o ponto A tem ordenada nula;
- o ponto C, situado no segundo quadrante, pertence à circunferência;
- a reta BC é paralela ao eixo das abcissas;
- o ângulo de amplitude α tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}C$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

3.1 Mostre que a área do trapézio $[OABC]$ é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha) = 4\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}(2\alpha)$$

3.2 Para um determinado valor de α tem-se que $\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$.

Determine o valor exato de $A\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

4. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = (x^2 + 4x + 1)e^{-x}$.

Sem recorrer à calculadora, estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 8)$ e $(2, 20)$, indique em qual das seguintes opções se encontram os valores de a e de b.

(A) $a = 4$ e $b = \ln 2$ **(B)** $a = \ln 2$ e $b = 4$ **(C)** $a = 2$ e $b = \ln 4$ **(D)** $a = \ln 4$ e $b = 2$

6. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-3x} - e^{x}}{2x} & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\ln(x^2 + 1) + x^2 - 2}{x + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

6.1 Averigue se a função h é contínua em $x = 0$.

6.2 Mostre que a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função h quando $x \longrightarrow +\infty$.

7. Para certos valores de a e de b $(a > 1$ e $b > 1)$, tem-se $\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right) = 3$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\sqrt{a^5 b^4}\right)$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

8. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação:

$$e^{x}\ln(5 - x) - 4\ln(9 - 2x) = 4\ln(5 - x) - e^{x}\ln(9 - 2x)$$

9. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2 - 4 + 2\ln x$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.

(B) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

(C) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(1, f(1)\right)$.

10. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x + 12e^{-x}$.

10.1 Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\ln 4$?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 7 **(D)** 10

10.2 Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Considere, em referencial o.n. Oxy, a representação gráfica da função f e o trapézio retângulo $[OCAB]$, tal que:

- o ponto A é o ponto de interseção, com maior abcissa, do gráfico de f com a reta de equação $y = 7$;
- o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy;
- o ponto C é a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox.

Determine a área do trapézio $[OCAB]$.

Apresente o resultado na forma $\ln a$, com $a > 0$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.**	**6.1**	**6.2**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1**	**10.2**	**TOTAL**
10	18	18	18	20	10	20	18	10	20	10	10	18	**200**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

Os três primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal são 1, n e ${}^{n}C_2$.

Sabemos que a sua soma é igual a 121.

Assim:

$$1+n+{}^{n}C_2=121 \Leftrightarrow 1+n+\frac{n!}{(n-2)!2!}=121$$

$$\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!}=120$$

$$\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}=120$$

$$\Leftrightarrow 2n+n(n-1)=240$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-240=0$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-240)}}{2\times1}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-1\pm 31}{2}$$

$$\Leftrightarrow n=-16 \ \vee \ n=15$$

n é um número natural, logo $n=15$.

A linha $n=15$ tem 16 elementos, logo há ${}^{16}C_2=120$ formas distintas de escolher, ao acaso, dois elementos dessa linha, o que corresponde ao número de casos possíveis.

Numa linha com 16 elementos, existem oito pares de números iguais. Assim, o número de casos favoráveis é oito.

Desta forma, a probabilidade pedida é $\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$.

2. $P(\bar{A}\,|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}$

$\Leftrightarrow P(\bar{A}\,|B)=\frac{0,3}{0,4}$

$\Leftrightarrow P(\bar{A}\,|B)=\frac{3}{4}$

Cálculos auxiliares

- A e B são acontecimentos equiprováveis, logo $P(A)=P(B)$;
- $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B) \Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=P(\bar{A}\cap B)$;
- $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0,3$

$\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0,3$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,7$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7$

$\Leftrightarrow 0,4+P(\bar{A}\cap B)=0,7$

$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap B)=0,3$

3.

3.1 $A_{[OABC]} = \frac{\overline{BC} + \overline{OA}}{2} \times \overline{AB}$

$A(2,0)$, $B(2, 2 \text{ sen } \alpha)$ e $C(2\cos\alpha, 2 \text{ sen } \alpha)$

Assim:

$$A(\alpha) = \frac{2 - 2\cos\alpha + 2}{2} \times 2 \text{ sen } \alpha$$

$\Leftrightarrow A(\alpha) = (4 - 2\cos\alpha) \times \text{sen } \alpha$

$\Leftrightarrow A(\alpha) = 4 \ \text{sen } \alpha - 2\text{sen } \alpha \times \cos\alpha$

$\Leftrightarrow A(\alpha) = 4 \text{ sen } \alpha - \text{sen}(2\alpha)$

3.2 $A\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 4 \text{ sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= 4 \text{ sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right) - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{18}\right) =$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{5}}{6} + \frac{2\sqrt{5}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18} =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{18} + \frac{8\sqrt{5}}{9} =$

$= \frac{25\sqrt{3} + 16\sqrt{5}}{18}$

Cálculos auxiliares

- $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

  $\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$

  $\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9}$

  $\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$

  $\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \lor \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

  $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, logo $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
- $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \alpha \times \cos\frac{\pi}{6} - \cos\alpha \times \text{sen}\frac{\pi}{6} =$

  $= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{6}$
- $\text{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}(2\alpha) \times \cos\frac{\pi}{3} - \cos(2\alpha) \times \text{sen}\frac{\pi}{3} =$

  $= -\frac{4\sqrt{5}}{9} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{18}$
- $\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{ sen } \alpha \times \cos\alpha = 2 \times \frac{2}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

4. $g'(x) = \left((x^2 + 4x + 1)e^{-x}\right)' =$

$= (x^2 + 4x + 1)' \times e^{-x} + (x^2 + 4x + 1) \times (e^{-x})' =$

$= (2x + 4) \times e^{-x} + (x^2 + 4x + 1) \times (-e^{-x}) =$

$= e^{-x} \times (2x + 4 - x^2 - 4x - 1) =$

$= e^{-x} \times (-x^2 - 2x + 3)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \times (-x^2 - 2x + 3) = 0$

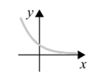
$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \lor -x^2 - 2x + 3 = 0$

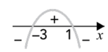
$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \ \vee \ x = 1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2 - 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$
Sinal de g'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação de g	↘	Mín.	↗	Máx.	↘





g é estritamente decrescente em $]-\infty, -3]$ e em $[1, +\infty[$.

g é estritamente crescente em $[-3, 1]$.

$g(-3) = ((-3)^2 + 4 \times (-3) + 1)e^{-(-3)} = -2e^3$

$g(1) = (1^2 + 4 \times 1 + 1)e^{-1} = 6e^{-1}$

g apresenta mínimo relativo $-2e^3$ em $x = -3$ e máximo relativo $6e^{-1}$ em $x = 1$.

5. Opção (C)

Os pontos de coordenadas (1, 8) e (2, 20) pertencem ao gráfico de f, logo $f(1) = 8$ e $f(2) = 20$.

Assim,

$$\begin{cases} 2a + e^b = 8 \\ 2a + e^{2b} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 - e^b \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ 8 - e^b + e^{2b} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ e^{2b} - e^b - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ e^b = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{1cm}} \\ e^b = \frac{1 \pm 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ e^b = 4 \ \vee \ \underbrace{e^b = -3}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 - e^{\ln 4} \\ b = \ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 - 4 \\ b = \ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \ln 4 \end{cases}$$

6.

6.1 h é contínua em $x = 0$ se existir $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$, ou seja, se $h(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$.

$h(0) = -2$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-3x} - e^x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x(e^{-4x} - 1)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-2e^x(e^{-4x} - 1)}{-4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}(-2e^x) \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-4x}-1}{-4x} =$$

$$= -2 \times e^0 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-4x}-1}{-4x}$$

Considerando a mudança de variável $y = -4x$; $x \to 0^- \Rightarrow y \to 0^+$, tem-se:

$$-2\times \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= -2\times 1 =$$

$$= -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1)+x^2-2}{x+1} =$$

$$= \frac{\ln(0^2+1)+0^2-2}{0+1} =$$

$$= \frac{\ln(1)-2}{1} =$$

$$= 0-2 =$$

$$= -2$$

Como $h(0) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = -2$, logo h é contínua em $x = 0$.

6.2 A reta de equação $y = x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função h quando $x \to +\infty$ se $\lim_{x\to +\infty}\left(h(x)-(x-1)\right) = 0$.

Assim:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(h(x)-(x-1)\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)+x^2-2}{x+1}-(x-1)\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)+x^2-2-(x-1)(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)+x^2-2-x^2+1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)\ -1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)-1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1}{x+1} =$$

$$\underbrace{=}_{x>0} \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1}{x+1} =$$

$$= 2\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} + \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1}{x+1} =$$

$$= 2\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)-1}{+\infty+1} =$$

$$= 2 \times \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \frac{\ln(1+0) - 1}{+\infty} =$$

$$= 2 \times \frac{0}{1+\frac{1}{+\infty}} + \frac{0 - 1}{+\infty} =$$

$$= 2 \times \frac{0}{1+0} + 0 =$$

$$= 2 \times 0 + 0 =$$

$$= 0$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(h(x) - (x - 1)\right) = 0$, prova-se que a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função h quando $x \to +\infty$.

7. Opção (C)

$$\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right) = 3 \Leftrightarrow \log_a(a^2) - \log_a(b) = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 - \log_a(b) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_a(b) = -1$$

$$\Leftrightarrow b = a^{-1}$$

$$\log_a\left(\sqrt{a^5 b^4}\right) = \log_a\left(\sqrt{a^5 (a^{-1})^4}\right) = \log_a\left(\sqrt{a^5 a^{-4}}\right) = \log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$$

$$\log_a\left(\sqrt{a^5 b^4}\right) = \log_a\left(\sqrt{a^5} \times \sqrt{b^4}\right) =$$

$$= \log_a\left(\sqrt{a^5}\right) + \log_a\left(\sqrt{b^4}\right) =$$

$$= \log_a\left(a^{\frac{5}{2}}\right) + \log_a\left(b^{\frac{4}{2}}\right) =$$

$$= \frac{5}{2} + 2\log_a(b) =$$

$$= \frac{5}{2} + 2 \times (-1) =$$

$$= \frac{5}{2} - 2 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

8. $D = \{x \in \mathbb{R}: 5 - x > 0 \wedge 9 - 2x > 0\} = \left]-\infty, \frac{9}{2}\right[$

Cálculo auxiliar

$5 - x > 0 \wedge 9 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow x < 5 \wedge x < \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$

Em $\left]-\infty, \frac{9}{2}\right[$:

$$e^x \ln(5 - x) - 4\ln(9 - 2x) = 4\ln(5 - x) - e^x \ln(9 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow e^x \ln(5 - x) + e^x \ln(9 - 2x) = 4\ln(9 - 2x) + 4\ln(5 - x)$$

$$\Leftrightarrow e^x(\ln(5 - x) + \ln(9 - 2x)) = 4(\ln(5 - x) + \ln(9 - 2x))$$

$$\Leftrightarrow e^x(\ln(5 - x) + \ln(9 - 2x)) - 4(\ln(5 - x) + \ln(9 - 2x)) = 0$$

$\Leftrightarrow (\ln(5-x)+\ln(9-2x))(e^x-4)=0$

$\Leftrightarrow \ln((5-x)(9-2x))(e^x-4)=0$

$\Leftrightarrow \ln((5-x)(9-2x))=0 \vee e^x-4=0$

$\Leftrightarrow (5-x)(9-2x)=e^0 \vee e^x=4$

$\Leftrightarrow 45-10x-9x+2x^2=1 \vee x=\ln 4$

$\Leftrightarrow 2x^2-19x+44=0 \vee x=\ln 4$

$\Leftrightarrow x=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\times 2\times 44}}{2\times 2} \vee x=\ln 4$

$\Leftrightarrow x=\frac{19\pm 3}{4} \vee x=\ln 4$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=\frac{11}{2} \vee x=\ln 4$

C.S. = $\{\ln 4, 4\}$

9. Opção (D)

$f'(x)= (x^2-4+2\ln x)' = 2x+2\times\frac{1}{x}=2x+\frac{2}{x}$.

$D_{f'}=\mathbb{R}^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, 2x+\frac{2}{x}>0$. Logo, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, o que invalida a opção (A).

$f''(x)= \left(2x+\frac{2}{x}\right)'' = 2-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^2-2}{x^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-2=0 \wedge x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x^2=1 \wedge x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=1) \wedge x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x=1$

x	0		1	$+\infty$
$2x^2-2$	n.d.	$-$	0	$+$
x	n.d.	$+$	$+$	$+$
Sinal de f''	n.d.	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Assim, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0,1]$ e concavidade voltada para cima em $[1,+\infty[$. Apresenta ponto de inflexão de coordenadas $(1, f(1))$. Desta forma, a opção correta é a (D).

10.

10.1 Opção (A)

$f'(x) = (e^x + 12e^{-x})' = e^x - 12e^{-x}$

$f'(\ln 4) = e^{\ln 4} - 12e^{-\ln 4} = 4 - 12e^{\ln(4^{-1})} = 4 - 12 \times 4^{-1} = 4 - 3 = 1$

10.2 Comecemos por determinar as coordenadas do ponto A:

$f(x) = 7 \Leftrightarrow e^x + 12e^{-x} = 7$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e^x \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}} e^{2x} - 7e^x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{7 \pm 1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \vee e^x = 4$

$\Leftrightarrow x = \ln 3 \vee x = \ln 4$

Como o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = 7$ com maior abcissa, tem-se que A tem coordenadas $(\ln 4, 7)$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto B:

$f(0) = e^0 + 12e^0 = 1 + 12 = 13$

O ponto B tem coordenadas $(0, 13)$.

O ponto C é a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox, logo as suas coordenadas são $(\ln 4, 0)$.

Assim, a área do trapézio $[OCAB]$ é dada por $\frac{\overline{OB} + \overline{AC}}{2} \times \overline{OC}$ e, portanto, $A_{[OCAB]} = \frac{13+7}{2} \times \ln 4 =$

$= 10 \ln 4 = \ln(4^{10}) = \ln 1\,048\,576$.