

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

4. De uma progressão aritmética (a_n) , sabe-se que:

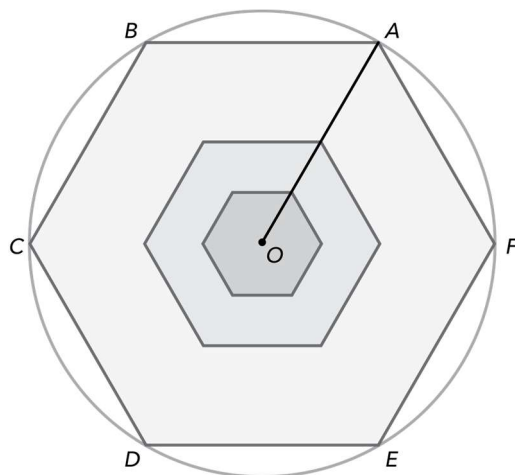
- $a_8 = 25 \times a_4$
- $a_2 + a_6 = 8$

Em qual das opções se encontra a soma dos 12 primeiros termos de (a_n) ?

- (A) 288 (B) 768 (C) 1042 (D) 1872

5. Considere um hexágono regular $[ABCDEF]$, inscrito numa circunferência de centro no ponto O . Fixada uma unidade de medida, tem-se $\overline{OA} = 6$.

Na figura seguinte está representada uma construção com três hexágonos regulares, que começou a ser elaborada a partir hexágono $[ABCDEF]$. O segundo hexágono desta construção obteve-se unindo os pontos médios dos segmentos de reta que ligam cada um dos vértices do hexágono $[ABCDEF]$ ao ponto O . O terceiro hexágono obteve-se unindo os pontos médios dos segmentos de reta que ligam cada um dos vértices do segundo hexágono com o ponto O .



Admita que esta construção continua, segundo o processo descrito, até se obter o oitavo hexágono. Determine a área do oitavo hexágono. Apresente o valor pedido arredondado às milésimas. Em cálculos intermédios, não efetue arredondamentos.

6. Considere os polinómios $P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 6a - 4$ ($a \in \mathbb{R}$) e $Q(x) = x^2 + 2x + 2$.

6.1 Em qual das seguintes opções se encontra o valor de a para o qual o polinómio $P(x)$ é divisível por $x - 2$?

- (A) -1 (B) 1 (C) -4 (D) 4

6.2 Considere, agora, $a = 2$.

Utilizando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determine o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

7. Considere a função polinomial f , definida por $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$.

Sabendo que -1 e 2 são zeros da função f , determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os valores reais de x para os quais a função f é não positiva.

Apresente a sua resposta na forma intervalo, ou de união de intervalos, de números reais.

8. Numa fábrica, a concentração C de um certo aditivo químico num tanque de mistura, em gramas por litro (g/l), varia com o tempo t (em minutos) de acordo com a função:

$$C(t) = \frac{10t + 120}{t + 4}$$

Complete o texto de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço. Escreva, na folha de respostas, cada um dos números, I, II e III, seguido da opção a), b) ou c) selecionada. Cada espaço corresponde a uma só opção.

"No instante inicial, a concentração do aditivo era I g/l.

Ao longo do tempo, a concentração é II e tenderá para III g/l."

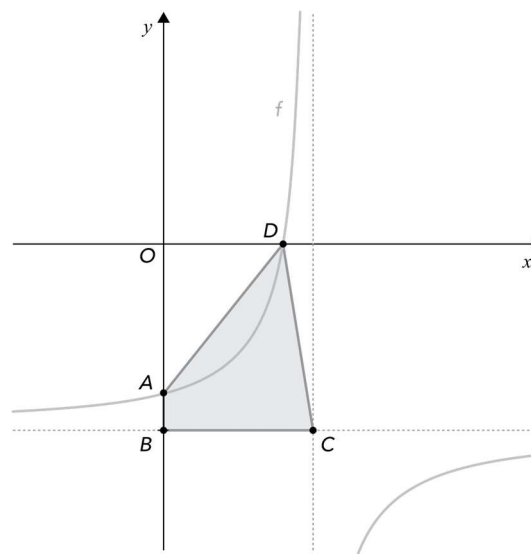
I	II	III
a) 10	a) crescente	a) 30
b) 30	b) constante	b) 10
c) 120	c) decrescente	c) 0

9. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por $f(x) = \frac{8 - 5x}{2x - 4}$.

Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy , parte do gráfico da função f e o quadrilátero $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- A e D são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados;
- C é o ponto de interseção das assintotas ao gráfico de f ;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que o ponto C .



Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, o valor da área do quadrilátero $[ABCD]$.

10. Num reator químico industrial, a quantidade de uma certa substância Q , em gramas, varia em função do tempo t , em minutos, desde o início do processo até ao final da reação, de acordo com a expressão:

$$Q(t) = \frac{40(1 + 0,05t)^3 - 35}{(1 + 0,05t)^2}$$

Considere o domínio $[0, 60]$.

- 10.1 Qual é, com arredondamento às unidades, a percentagem de aumento da quantidade de substância no reator durante o primeiro minuto da reação?

(A) 5% (B) 95% (C) 105% (D) 150%

- 10.2 Existe um instante a partir do qual, passados 12 minutos, a quantidade de substância no reator duplica.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esse instante, sabendo que existe e que é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a abcissa do ponto relevante arredondada às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.1	2.2	3.	4.	5.	6.1	6.2	7.	8.	9.	10.1	10.2	Total
20	10	20	18	10	18	10	18	20	10	18	10	18	200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1.

$$\begin{aligned} 1.1 \quad (\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha - \pi))^2 &= (-\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \\ &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Sabemos que $A(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$.

Como α pertence ao segundo quadrante, $2 \cos \alpha < 0$ e $2 \sin \alpha > 0$.

$$\overline{AB} = 2 \times 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha$$

$$\text{Altura} = -2 \cos \alpha$$

$$A_{[OAB]} = \frac{4 \sin \alpha \times (-2 \cos \alpha)}{2} = -4 \sin \alpha \times \cos \alpha$$

Tem-se que $A_{[OAB]} = 1$, de onde resulta que $-4 \sin \alpha \times \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \sin \alpha \times \cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Assim, $(\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha - \pi))^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

2.

2.1 Opção (D)

Uma vez que as coordenadas do ponto P estão em progressão geométrica de razão -1 , são da forma $(x, -x, x)$, sendo $x \in \mathbb{R}$.

Como o ponto P pertence ao plano α , as suas coordenadas têm de verificar a equação do plano. Assim, $x - 2 \times (-x) - x + 8 = 0 \Leftrightarrow x + 2x - x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$.

Desta forma, o ponto P tem coordenadas $(-4, 4, -4)$.

2.2 A superfície esférica de equação $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = r^2$ ($r \in \mathbb{R}^+$) tem centro no ponto C de coordenadas $(5, -2, 5)$.

Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C :

$$(x, y, z) = (5, -2, 5) + k(1, -2, -1), k \in \mathbb{R}$$

As coordenadas de um qualquer ponto da reta r são da forma:

$$(5 + k, -2 - 2k, 5 - k), k \in \mathbb{R}$$

Seja I o ponto de interseção da reta r com o plano α .

$$5 + k - 2(-2 - 2k) - (5 - k) + 8 = 0 \Leftrightarrow 5 + k + 4 + 4k - 5 + k + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6k = -12$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

$$I(5 - 2, -2 - 2(-2), 5 - (-2)) = (3, 2, 7)$$

$$\vec{CI} = I - C = (3, 2, 7) - (5, -2, 5) = (-2, 4, 2)$$

$$\|\vec{CI}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

O raio dessa superfície esférica é $2\sqrt{6}$ u.c.

3. Existem duas alternativas mutuamente exclusivas. Na primeira alternativa, o Miguel oferece quatro jogos e dois comandos a um dos irmãos, ficando o outro irmão com os restantes. Existem duas opções na escolha do irmão que irá receber os quatro jogos e os dois comandos. Para cada uma destas opções, há 6C_4 formas de escolher quatro jogos de entre os seis disponíveis. Para cada uma destas escolhas, existem 4C_2 maneiras de selecionar dois comandos, de entre os quatro disponíveis, para oferecer a esse irmão, ficando os restantes para o outro.

Assim, existem $2 \times {}^6C_4 \times {}^4C_2 = 180$ formas de concretizar esta alternativa.

Na segunda alternativa, o Miguel oferece três jogos e um comando a um dos irmãos, e os restantes ao outro. Existem duas opções na escolha do irmão que irá receber três jogos e um comando. Para cada uma destas opções, há 6C_3 formas de escolher três jogos de entre os seis disponíveis. Para cada uma destas escolhas, existem quatro maneiras de selecionar um comando de entre os quatro disponíveis para oferecer a esse irmão, ficando os restantes para o outro.

Assim, existem $2 \times {}^6C_3 \times 4 = 160$ formas de concretizar esta alternativa.

Logo, o número de modos diferentes para o Miguel repartir os dez objetos pelos seus dois irmãos é $180 + 160 = 340$.

4. Opção (B)

$$a_8 = 25 \times a_4 \Leftrightarrow a_1 + 7r = 25 \times (a_1 + 3r) \Leftrightarrow 24a_1 = -68r \Leftrightarrow a_1 = -\frac{17r}{6}$$

$$a_2 + a_6 = 8 \Leftrightarrow a_1 + r + a_1 + 5r = 8 \Leftrightarrow a_1 + 3r = 4$$

$$\text{Desta forma, } -\frac{17r}{6} + 3r = 4 \Leftrightarrow \frac{r}{6} = 4 \Leftrightarrow r = 24 \text{ e, portanto, } a_1 = -\frac{17 \times 24}{6} = -68.$$

$$a_n = -68 + (n - 1) \times 24 \Leftrightarrow a_n = 24n - 92$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \times 12 = \frac{-68 + 24 \times 12 - 92}{2} \times 12 = 768$$

O valor da soma dos 12 primeiros termos é 768.

5. De acordo com os dados do enunciado, sabe-se que os vértices de cada hexágono construído a partir do hexágono $[ABCDEF]$ são os pontos médios dos segmentos de reta que ligam o ponto O a cada dos vértices do hexágono anterior. Daqui resulta que a razão de semelhança entre as medidas dos lados de dois hexágonos consecutivos é $\frac{1}{2}$, pelo que a razão entre as respetivas áreas é $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Assim, as áreas dos sucessivos hexágonos estão em progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$. O hexágono $[ABCDEF]$ está inscrito numa circunferência de raio 6, pelo que a medida de cada um dos seus lados é igual a 6.

Seja x a medida do apótema do hexágono $[ABCDEF]$.

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$6^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 27 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{27}$$

$$x > 0, \text{ logo } x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Determinemos, agora, o valor da área do hexágono $[ABCDEF]$: $A_{[ABCDEF]} = 6 \times \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$.

Assim, a área do oitavo hexágono construído a partir do hexágono $[ABCDEF]$ é:

$$54\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \approx 0,006 \text{ u.a.}$$

6.

6.1 Opção (B)

Para que $P(x)$ seja divisível por $x - 2$ é necessário que $P(2) = 0$.

$$\text{Desta forma, } P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^4 - 2 \times 2^3 - 2 + 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1.$$

Assim, o valor de a para o qual o polinómio $P(x)$ é divisível por $x - 2$ é 1.

6.2 Para $a = 2$: $P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 6 \times 2 - 4 = x^4 - 2x^3 - x + 8$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 0x^2 - x + 8 \\ -x^4 - 2x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^3 - 2x^2 - x + 8 \\ +4x^3 + 8x^2 + 8x \\ \hline 6x^2 + 7x + 8 \\ -6x^2 - 12x - 12 \\ \hline -5x - 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x + 2 \\ \hline x^2 - 4x + 6 \end{array} \right. \end{array}$$

O quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ são, respetivamente, $x^2 - 4x + 6$ e $-5x - 4$.

7. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x - 24 = (x + 1)(x - 2)(x^2 - x - 12)$

Cálculos auxiliares					
	1	-2	-13	14	24
-1		-1	3	10	-24
	1	-3	-10	24	0
2		2	-2	-24	
	1	-1	-12	0	

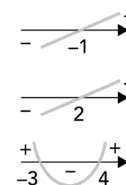
$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 4$$

x	$-\infty$	-3		-1		2		4	$+\infty$
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - x - 12$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+



$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1 \vee 2 \leq x \leq 4$

C.S. = $[-3, -1] \cup [2, 4]$

8. I - b); II - c); III - b)

$C(0) = \frac{10 \times 0 + 120}{0 + 4} = 30$

No instante inicial, a concentração do aditivo era 30 g/l.

$$\frac{10t + 120}{t + 4} = 10 + \underbrace{\frac{80}{t + 4}}_{\substack{\text{diminui à medida} \\ \text{que } t \text{ aumenta} \\ \text{diminui}}}$$

A reta de equação $y = 10$ é assíntota horizontal ao gráfico de C quando t tende para $+\infty$.

Assim, ao longo do tempo, a concentração é decrescente e tenderá para 10 g/l.

Cálculo auxiliar	
$10t + 120$	$\frac{t + 4}{10}$
$-10t - 40$	
80	
$\frac{10t + 120}{t + 4} = 10 + \frac{80}{t + 4}$	

9. Começemos por determinar as coordenadas dos pontos A e D .

$f(0) = \frac{8 - 5 \times 0}{2 \times 0 - 4} = -2$

O ponto A tem coordenadas $(0, -2)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} - \frac{1}{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} = \frac{1}{x-2}$

$\Leftrightarrow -5x + 10 = 2 \wedge x \neq 2$

Cálculo auxiliar	
$-5x + 8$	$\frac{2x - 4}{-\frac{5}{2}}$
$5x - 10$	
-2	
$\frac{8 - 5x}{2x - 4} = -\frac{5}{2} - \frac{2}{2x - 4} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{x - 2}$	

$$\Leftrightarrow -5x = -8 \wedge x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \wedge x \neq 2$$

O ponto D tem coordenadas $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$.

$f(x) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{x-2}$, assim, sabemos que a equação da assíntota vertical ao gráfico de f é $x = 2$ e que a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f é $y = -\frac{5}{2}$.

O ponto C resulta da interseção das duas retas, pelo que as suas coordenadas são $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$.

B pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que o ponto C , logo as suas coordenadas são $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

Seja E o ponto de coordenadas $(2, 0)$, projeção ortogonal do ponto C sobre o eixo Ox .

O valor da área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtido por: $A_{[OBCE]} - A_{[ODA]} - A_{[DEC]}$.

$$\text{Assim, } A_{[ABCD]} = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{\frac{8}{5} \times 2}{2} - \frac{\left(2 - \frac{8}{5}\right) \times \frac{5}{2}}{2} = 5 - \frac{8}{5} - \frac{1}{2} = 2,9.$$

O valor da área do quadrilátero $[ABCD]$ é 2,9 u.a.

10.

10.1 Opção (C)

Para calcular a percentagem de aumento durante o primeiro minuto, precisamos de saber a quantidade inicial ($t = 0$) e a quantidade após um minuto ($t = 1$):

$$Q(0) = \frac{40(1+0,05 \times 0)^3 - 35}{(1+0,05 \times 0)^2} = 5$$

$$Q(1) = \frac{40(1+0,05 \times 1)^3 - 35}{(1+0,05 \times 1)^2} = \frac{646}{63}$$

Cálculo da percentagem de aumento:

$$\frac{Q(1) - Q(0)}{Q(0)} \times 100 = \frac{\frac{646}{63} - 5}{5} \times 100 \approx 105\%$$

10.2 Pretende-se determinar o instante a partir do qual, passados 12 minutos, a quantidade de substância no reator duplica.

Uma equação que permite resolver o problema é:

$$Q(t + 12) = 2Q(t) \Leftrightarrow \frac{40(1+0,05(t+12))^3 - 35}{(1+0,05(t+12))^2} = 2 \times \frac{40(1+0,05t)^3 - 35}{(1+0,05t)^2}$$

Utilizando x como variável independente:

$$\frac{40(1+0,05(x+12))^3 - 35}{(1+0,05(x+12))^2} = 2 \times \frac{40(1+0,05x)^3 - 35}{(1+0,05x)^2}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1 = \frac{40(1+0,05(x+12))^3 - 35}{(1+0,05(x+12))^2}, 0 \leq x \leq 48$$

$$y_2 = 2 \times \frac{40(1+0,05x)^3 - 35}{(1+0,05x)^2}, 0 \leq x \leq 48$$

Assim, o instante em que $Q(t + 12) = 2Q(t)$, com arredondamento às centésimas, é 6,82.

Tem-se que $0,82 \times 60 \approx 49$, pelo que o instante pretendido ocorre 6 minutos e 49 segundos após o início do processo.

