Teste de avaliação n.º 3

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome: | **N.º:** | **Turma:**

Duração do teste: 90 minutos | **Tolerância:** 10 minutos | **Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere três sacos, A, B e C, contendo bolas de diferentes cores:

- Saco A: 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis, indistinguíveis entre si.
- Saco B: 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 2 bolas verdes, indistinguíveis entre si.
- Saco C: 4 bolas amarelas, numeradas de 1 a 4, 3 bolas azuis indistinguíveis e 2 bolas vermelhas indistinguíveis.

Em cada saco, retiram-se todas as bolas, uma a uma, colocando-as em fila pela ordem de saída.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.
Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II e III, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O número de sequências diferentes que é possível formar ao retirar todas as bolas do:

- saco A é __**I**__,
- saco B é __**II**__,
- saco C é __**III**__.

I	II	III
a) $10!$ **b)** ${}^{10}C_4$ **c)** ${}^{10}A_6$	**a)** $5!\,3!\,2!$ **b)** $\frac{10!}{(5+3+2)!}$ **c)** $\frac{10!}{5!3!2!}$	**a)** ${}^{9}A_4 \times {}^{5}C_3$ **b)** ${}^{9}A_4 \times {}^{9}C_3$ **c)** ${}^{9}A_4 \times 4! \times {}^{5}C_3$

2. Num campeonato de desporto escolar, consideram-se os acontecimentos sobre a equipa de uma escola:

- A: “a equipa vence o jogo”;
- B: “a equipa joga em casa”.

Sabe-se que, para um número natural n, com $n \geq 2$, verifica-se que:

- $P(A) = \frac{n}{10}$
- $P(B) = \frac{1}{2}$
- $P(A \cap B) = \frac{n-2}{10}$

2.1. Sabe-se que a equipa já venceu pelo menos um jogo em casa e que os acontecimentos A e B não são independentes.

Qual dos seguintes valores pode ser o valor de n?

(A) $n = 2$ **(B)** $n = 4$ **(C)** $n = 6$ **(D)** $n = 8$

2.2. Considere agora que $n = 5$.

Determine a probabilidade de a equipa vencer o jogo, sabendo que não joga em casa.

Apresente o resultado na forma de dízima.

3. Numa plataforma educativa baseada em Inteligência Artificial, os alunos podem aceder a várias funcionalidades, entre as quais:

- um assistente de IA para resolver exercícios;
- um modo de explicações teóricas passo a passo.

Relativamente aos alunos que utilizam a plataforma, sabe-se que:

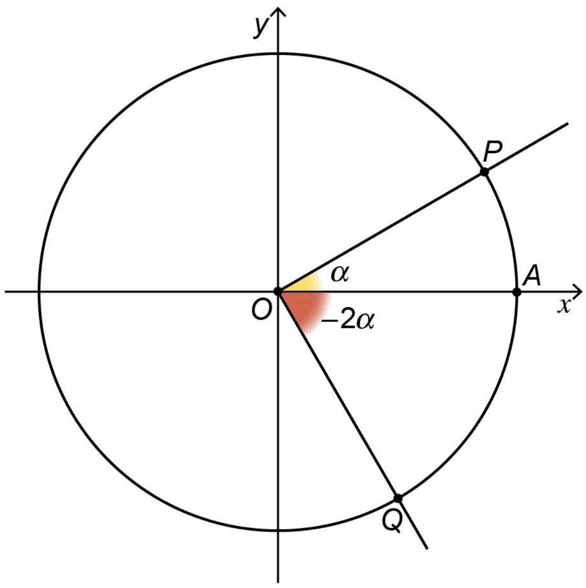
- 60% utilizam o assistente de IA para resolver exercícios;
- 25% utilizam o modo de explicações teóricas e não utilizam o assistente de IA;
- metade dos alunos que utilizam o modo de explicações teóricas utiliza também o assistente de IA.

Selecionou-se, ao acaso, um aluno da plataforma que não utiliza o modo de explicações teóricas.

Determine a probabilidade de esse aluno utilizar o assistente de IA para resolver exercícios.

Apresente o resultado na forma de dízima.

4. Na figura encontra-se representada, em referencial o. n. Oxy, a circunferência de centro O e os pontos A, P e .



Sabe-se que:

- os pontos A, P e Q pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ângulo AOP tem amplitude α;
- α pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ângulo AOQ tem amplitude -2α ;
- a abcissa do ponto P é k.

Qual das seguintes expressões representa a abcissa do ponto Q, em função de k?

(A) $\frac{k}{2}$ **(B)** $2k^2 - 1$ **(C)** $2k$ **(D)** $1 - 2k^2$

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x)}{x}+x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x<0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1+x} & \text{se} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

5.1. Averigue se a função f é contínua em $x=0$.

5.2. Mostre que o eixo Ox é uma assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

6. De uma função f, sabe-se que:

- é contínua em $[1,2]$;
- $f(1)=1$;
- $f(2)=3$.

Para qual das seguintes funções existe necessariamente um zero em $]1,2[$?

(A) $f(x)-x$ **(B)** $f(x)-2$ **(C)** $\dfrac{f(x)}{x}$ **(D)** $f(x)+x$

7. Seja f uma função duas vezes diferenciável de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;
- $f''(x)>\sin(x)+\pi,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Considere as seguintes proposições acerca do gráfico da função $-f$.

I. A reta de equação $x=0$ é uma assíntota vertical ao seu gráfico.

II. O seu gráfico tem concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

8. Considere a função f definida por

$$f(x) = \cos(2x)$$

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = \alpha$, sabendo que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Qual é o declive da reta perpendicular à reta t?

(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $-\sqrt{3}$ **(D)** $\sqrt{3}$

9. Considere a função f definida em $[0, \pi[$ por

$$f(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

Estude a função f, no intervalo $[0, \pi[$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico da função f.

10. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a função f_k definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f_k(x) = \cos(x + k) - \cos(x - k)$$

Determine os valores reais de k para os quais a função f_k é par.

11. No desenvolvimento de um simulador de realidade virtual num jogo, estão a ser testados dois modelos de cápsulas, A e B, que se deslocam verticalmente de forma periódica, simulando movimentos oscilatórios.

A altura da cápsula A relativamente ao chão, em metros, ao fim de t segundos é dada por

$$h_A(t) = 1{,}8\sin(0{,}8t) + 1{,}2\cos(0{,}8t) + 4, \text{ com } 0 \leq t \leq 20$$

A altura da cápsula B relativamente ao chão, em metros, ao fim de t segundos é dada por:

$$h_B(t) = 2\sin(0{,}2t) + 3, \text{ com } 0 \leq t \leq 20$$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, os instantes t, em segundos, em que a altura da cápsula A, dois segundos antes, era igual a metade da altura da cápsula B nesse instante.

Apresente os resultados arredondados às centésimas.

Na sua resposta deve:

- apresentar uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permita(m) resolver a equação;
- apresentar as abcissas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**Total**
15	10	15	20	10	20	20	10	15	10	20	15	20	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

I. Como as bolas da mesma cor são indistinguíveis, dos 10 lugares da fila queremos escolher 4 para as bolas azuis, não interessando a ordem: ${}^{10}C_4$. As vermelhas ficam nas posições que sobram.

II. Depois de distribuir as 5 bolas brancas pelas 10 posições, de ${}^{10}C_5$ maneiras distintas, para cada uma dessas sequências, ainda é preciso distribuir as 3 bolas pretas pelas 5 posições que sobram: ${}^{5}C_3$. As restantes, as bolas verdes, ficam nas posições que sobram.

Assim, como para cada uma das ${}^{10}C_5$ formas de distribuir as bolas brancas, existem ${}^{5}C_3$ maneiras de distribuir as bolas pretas, no total, existem

$${}^{10}C_5 \times {}^{5}C_3 = \frac{10!}{5!\,5!} \times \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!}$$

sequências diferentes possíveis.

III. Como as 4 bolas amarelas são diferentes, há ${}^{9}A_4$ formas diferentes de as dispor de forma diferente numa fila de 9 bolas – agora já interessa a ordem. Para cada uma destas disposições, há ${}^{5}C_3$ formas de escolher a posição para as 3 bolas azuis que são indistinguíveis. As vermelhas ficam nas posições que sobram.

Existem assim ${}^{9}A_4 \times {}^{5}C_3$ sequências diferentes para as bolas do saco C.

I. b)

II. c)

III. a)

2.1.

Como a equipa já ganhou pelo menos um jogo em casa, $P(A \cap B) > 0$, logo, $\frac{n-2}{10} > 0$, ou seja, $n > 2$, o que exclui a opção $n = 2$.

Para A e B serem independentes,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \dfrac{n-2}{10} = \dfrac{n}{10} \times \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 20n - 40 = 10n \Leftrightarrow 20n - 10n = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10n = 40 \Leftrightarrow n = 4$

Como os acontecimentos A e B não são independentes, então $n \neq 4$.

Se $n = 8$, $P(A \cap B) = \frac{8-2}{10} = 0{,}6 > P(B) = 0{,}5$, o que é impossível.

Por exclusão de partes, conclui-se que $n = 6$.

Verificações:

- $P(A \cap B) = \frac{6-2}{10} = 0{,}4 \neq 0$
- $0{,}4 = P(A \cap B) < P(A) = 0{,}6$ e $0{,}4 = P(A \cap B) < P(B) = 0{,}5$
- $P(A \cap B) = 0{,}4$

  $P(A) \times P(B) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{2} = 0{,}3$

  logo, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, ou seja, A e B não são independentes.

  Opção (C).

2.2. $n = 5$

$P(A) = \frac{5}{10} = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$P(A|\bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0{,}5 - 0{,}3}{1 - 0{,}5} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$

3.
A: “utiliza o assistente de IA”
E: “utiliza o modo de explicações teóricas”

$P(A) = 0{,}6$
$P(E \cap \bar{A}) = 0{,}25$
$P(A|E) = 0{,}5$
Quer-se determinar $P(A|\bar{E}) = \frac{P(A\cap\bar{E})}{P(\bar{E})}$.

$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
$P(\bar{E} \cap \bar{A}) = 0{,}4 - 0{,}25 = 0{,}15$
$P(A|E) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = 0{,}5 \Leftrightarrow P(A \cap E) = 0{,}5P(E)$
Designando $P(E)$ por k, quer-se que:
$k = 0{,}5k + 0{,}25 \Leftrightarrow 0{,}5k = 0{,}25 \Leftrightarrow k = 0{,}5$

	E	$\bar{E}$	Total
A	$0{,}5k$		0,6
$\bar{A}$	0,25	0,15	0,4
Total	k		1

Assim:
$P(E) = 0{,}5$
$P(\bar{E}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
$P(A \cap E) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
$P(A \cap \bar{E}) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$

	E	$\bar{E}$	Total
A	0,25	0,35	0,6
$\bar{A}$	0,25	0,15	0,4
Total	0,5	0,5	1

Logo,

$$P(A|\bar{E}) = \frac{P(A \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$$

4. Abcissa do ponto P: $\cos(\alpha) = k$
Abcissa do ponto Q: $\cos(-2\alpha) = \cos(2\alpha)$

Quer-se determinar $\cos(2\alpha)$ sabendo que $\cos(\alpha) = k$
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 2k^2 - 1$

Opção (B).

5.1.

Para f ser contínua em $x = 0$, temos de ter:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

- $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{1+0}-1}{1+0} = 0$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\sin(3x)}{x} + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(3x)}{x} + \lim_{x \to 0^-} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{\sin(y)}{\frac{y}{3}} + \lim_{z \to +\infty} \frac{\sin(z)}{z} =$$

$$= 3 \lim_{y \to 0^-} \frac{\sin(y)}{y} + \lim_{z \to +\infty} \frac{\sin(z)}{z} =$$

$$= 3 \times 1 + 0 = 3$$

$y = 3x \to 0^-$

$x = \frac{y}{3}$

$z = \frac{1}{x} \to +\infty$

$x = \frac{1}{z}$

$-1 \leq \sin(z) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$-\frac{1}{z} \leq \frac{\sin(z)}{z} \leq \frac{1}{z}, \forall x \in \mathbb{R}$

Como quando $z \to +\infty$, $-\frac{1}{z} \to 0$ e $\frac{1}{z} \to 0$, então, $\lim_{z \to +\infty} \frac{\sin(z)}{z} = 0$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$, f não é contínua em $x = 0$.

5.2.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(1+x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x-1}{(1+x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(1+x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} =$$

$$= 1 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\infty}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$, ou seja, o eixo Ox, é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

6.

Como f é contínua em $[1,2]$, todas as funções dadas são contínuas em $[1, 2]$.

(A) $g(x) = f(x) - x$

$g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

$g(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0$

Existe um zero em $x = 1$, mas não é possível garantir que exista em $]1, 2[$.

(B) $g(x) = f(x) - 2$

$g(1) = f(1) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$

$g(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0$

(C) $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

$$g(1) = \frac{f(1)}{1} = \frac{1}{1} = 1 > 0$$

$$g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{3}{2} > 0$$

(D) $g(x) = f(x) + x$

$g(1) = f(1) + 1 = 1 + 1 = 2 > 0$

$g(2) = f(2) + 2 = 3 + 2 = 5 > 0$

Assim, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, apenas se garante a existência de um zero em $]1, 2[$ para a função definida por $f(x) - 2$.

Opção (B).

7.

I.

$\lim_{x\to 0^{\pm}}(-f(x)) = -\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$,

logo $x = 0$ não é a equação de uma assíntota vertical ao gráfico de $-f$.

II.

Como $\sin(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$f''(x) > \sin(x) + \pi \geq -1 + \pi > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, como $(-f)''(x) = -f''(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, o gráfico de $-f$ tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}$.

8.

- $f'(x) = (\cos(2x))' = -2\sin(2x)$
- Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tem-se que $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- O declive da reta t é $f'(\alpha) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$
- O declive da reta perpendicular à reta t é o simétrico do seu inverso, ou seja:
  $$-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Opção (B).

9.

- $f'(x) = (\cos(x) + \sin(x))' = (\cos(x))' + (\sin(x))' = -\sin(x) + \cos(x)$
- $f''(x) = (-\sin(x) + \cos(x))' = (-\sin(x))' + (\cos(x))' = -\cos(x) - \sin(x)$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(x) - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\sin(x) \Leftrightarrow \cos(x) = \sin(-x) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Se $k = 0$, $x = -\frac{\pi}{4} \notin [0, \pi[$

  Se $k = 1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi[$

  Se $k = 2$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} \notin [0, \pi[$

  Se $k = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi[$

-

x	0	$\frac{3\pi}{4}$		π
f''	$-$	0	$+$	N.D.
f	$\cap$	P.I.	$\cup$	N.D.

- O gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ e concavidade voltada para cima em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$.

  O ponto de coordenadas $\left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f.

  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

  $= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

10.

$f_k(x) = \cos(x+k) - \cos(x-k) =$

$= \cos(x)\cos(k) - \sin(x)\sin(k) - \cos(x)\cos(k) - \sin(x)\sin(k) =$

$= -2\sin(x)\sin(k)$

Quer-se que $f_k(-x) = f_k(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f_k(-x) = f_k(x) \Leftrightarrow -2\sin(-x)\sin(k) = 2\sin(x)\sin(k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin(x)\sin(k) - 2\sin(x)\sin(k) = 0 \Leftrightarrow 4\sin(x)\sin(k) = 0$

Como a igualdade se deve verificar para todo o $x \in \mathbb{R}$ e a função $y = \sin(x)$ não é a função nula, tem-se necessariamente:

$\sin(k) = 0 \Leftrightarrow k = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Assim, f_k é par se e só se $k = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Alternativa de resposta:

A função f_k é par se e só se $\forall x \in D_{f_k}$, $f_k(-x) = f_k(x)$.

$f_k(-x) = f_k(x) \Leftrightarrow \cos(-x+k) - \cos(-x-k) = \cos(x+k) - \cos(x-k)$

$\Leftrightarrow \cos\big(-(x-k)\big) - \cos\big(-(x+k)\big) = \cos(x+k) - \cos(x-k)$

$\Leftrightarrow \cos(x-k) - \cos(x+k) = \cos(x+k) - \cos(x-k)$ $\qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\cos(x-k) = 2\cos(x+k)$

$\Leftrightarrow \cos(x-k) = \cos(x+k)$

$\Leftrightarrow x - k = x + k + 2n\pi \;\vee\; x - k = -x - k + 2k\pi \,, n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -2k = 2n\pi \;\vee\; 2x = 2n\pi \,, n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow k = n\pi \;\vee\; x = n\pi \,, n \in \mathbb{Z}$

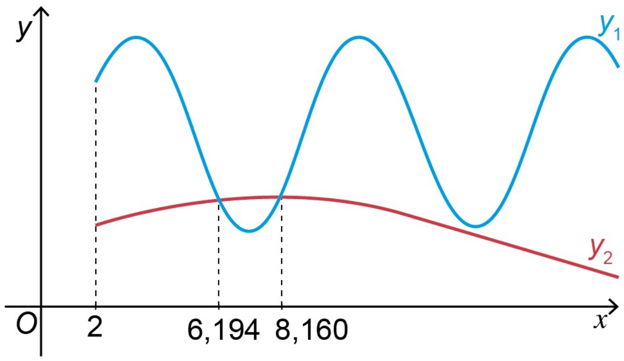
$\Leftrightarrow k = n\pi \;, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ f_k é par $\forall x \in D_{f_k}$

11. Quer-se resolver a equação

$\underbrace{h_A(t-2)}_{y_1} = \underbrace{0{,}5h_B(t)}_{y_2}$, em $[2, 20]$.

Quer-se que:

$t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$



Os instantes em que a altura da cápsula A, dois segundos antes, era igual a metade da altura da cápsula B nesse instante são:

$t_1 \approx 6{,}19$ segundos

$t_2 \approx\ 8{,}16$ segundos