Teste de avaliação n.º 3

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome: | **N.º:** | **Turma:**

Duração do teste: 90 minutos | **Tolerância:** 10 minutos | **Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O Sérgio tem dois códigos diferentes para entrar nos prédios dos avós paternos e dos avós maternos.

Ambos os códigos são constituídos apenas por algarismos, mas obedecem a condições diferentes.

- Um dos códigos é constituído por 3 algarismos, sendo o 1.º algarismo par; os restantes algarismos podem ser quaisquer algarismos de 0 a 9.
- O outro código é constituído por 4 algarismos, sendo:
  - o 1.º algarismo ímpar;
  - o 2.º algarismo igual a 0 ou 5;
  - todos os algarismos diferentes entre si.

O Sérgio quer entrar no prédio dos avós paternos, mas não se recorda de que conjunto de condições corresponde a cada prédio.

Quantos códigos diferentes poderá ter de experimentar?

(A) $5 \times 8 \times 7 + (5 + 4) \times 10^2$

(B) $5 \times 10^2 + (5 + 4) \times 8 \times 7$

(C) $5 \times 8 \times 7 + 5 \times 2 \times 10^2$

(D) $5 \times 10^2 + 5 \times 2 \times 8 \times 7$

2. Cem alunos e vinte professores de uma escola participaram numa cerimónia de entrega de prémios de uma competição interescolas.

2.1. No auditório da cerimónia, numa fila, existem 8 lugares consecutivos, numerados de 1 a 8 onde se vão sentar 5 pessoas da escola, sendo 2 professores e 3 alunos.

Sabe-se que, dos alunos, apenas 2 ocupam lugares pares.

O número de disposições possíveis das 5 pessoas nos 8 lugares, respeitando as condições indicadas, é dado pela expressão

$$^{3}C_2 \times {}^{4}A_2 \times 4 \times {}^{5}A_2$$

Explique o significado de cada um dos fatores da expressão anterior.

2.2. Para irem a palco receber um prémio, foram selecionadas 3 pessoas da escola. Determine o número de seleções possíveis, de entre todos os professores e alunos da escola, sabendo que pelo menos dois dos selecionados são alunos.

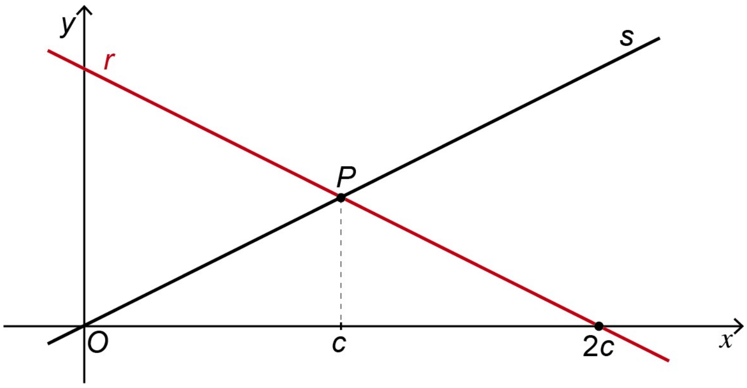
3. Numa aplicação de edição de fotografia, um utilizador pode aplicar dois filtros distintos, um a seguir ao outro.

Sabe-se que a ordem de aplicação dos filtros é relevante, uma vez que o efeito produzido por um filtro pode alterar o resultado do filtro aplicado em seguida.

Verificou-se que é possível obter 420 efeitos diferentes desta forma.

Determine o número de filtros distintos disponíveis na aplicação.

4. Na figura encontram-se representadas em referencial o. n. Oxy duas retas, r e s.



Sabe-se que:

- a reta r interseta a reta s no ponto P, cuja abcissa é c, com $c > 0$, e interseta o eixo das abcissas no ponto de abcissa $2c$;
- a reta s fica definida pela sua equação vetorial $(x, y) = k(1, 2),\ k \in \mathbb{R}$.

Determine a inclinação da reta r.

Apresente a resposta em radianos, arredondada às centésimas.

5. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que:

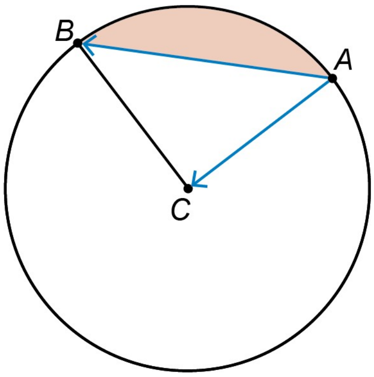
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = 5$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = 9$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

Qual é o valor de $\| \vec{u} - \vec{v} \|$?

(A) $\sqrt{6}$ **(B)** $\sqrt{10}$ **(C)** $\sqrt{12}$ **(D)** $\sqrt{14}$

6. Na figura encontra-se representada uma circunferência de centro C.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.



Sabe-se que:

- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$

Determine a área da região sombreada.

Apresente a resposta arredondada às centésimas.

7. Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$, em referencial o. n. Oxy:

$$\vec{u} = (2, -1) \text{ , } \vec{v} = (1, 2) \text{ e } \vec{r} = (1, -1).$$

Seja $\vec{w}$ um vetor da forma:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v},$$

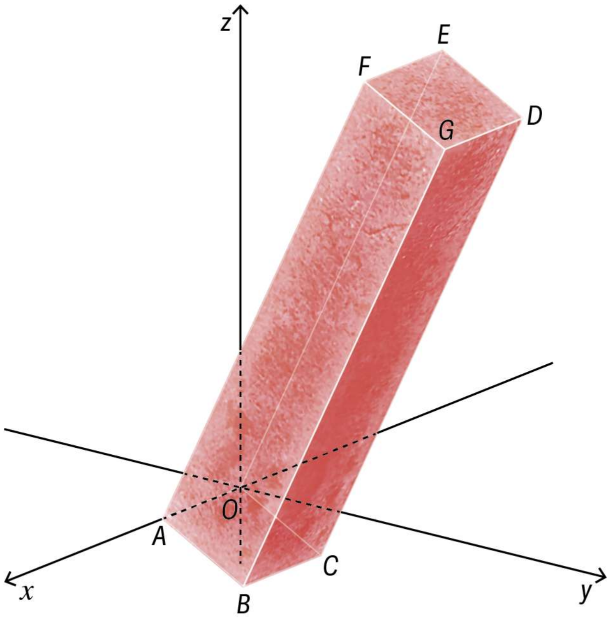
com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que:

- $\vec{w}$ é perpendicular ao vetor $\vec{r}$;
- $\alpha + \beta = 1$.

Determine a amplitude do ângulo dos vetores $\vec{w}$ e $\vec{u} + \vec{v}$.

Apresente a resposta em graus arredondada às unidades.

8. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- o plano OAB fica definido pela equação cartesiana $y + 2z = 0$;
- o vértice G tem coordenadas $(5, 14, 18)$.

8.1. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.
Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II e III, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O plano de equação $y + 2z = 1$ é ___I___ ao plano OAB.
A reta de equação $x = 5 \wedge y = 0$ é ___II___ ao plano OAB.
A distância de G ao plano OAB é igual a ___III___ .

I	II	III
a) estritamente paralelo **b)** oblíquo **c)** perpendicular	**a)** estritamente paralela **b)** oblíqua **c)** perpendicular	**a)** $\overline{OG}$ **b)** $\overline{OE}$ **c)** $\overline{OC}$

8.2. Determine o volume do prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$.

9. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(t) = a\cos(\omega t + \varphi) + b, \text{ com } a \neq 0$$

em que t representa o tempo.

Sejam M e m os valores máximo e mínimo absolutos da função f, respetivamente.

Sabe-se que entre um instante em que $f(t) = m$ e o instante seguinte, em que $f(t) = M$, decorrem 12 unidades de tempo.

Qual dos seguintes valores é período da função f?

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 36 **(D)** 48

10. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) O contradomínio de f é $[0, 2]$.

(B) O período fundamental de f é π.

(C) Os zeros de f são da forma $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(D) O gráfico de f obtém-se a partir do gráfico de $y = \sin x$ por contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguido de uma translação associada ao vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

11. Considere que a temperatura T, em graus Celsius, numa determinada estufa agrícola, durante uma semana, é modelada pela função

$$T(t) = 6\cos\left(\frac{\pi}{72}t\right) + 18,$$

em que t representa o tempo, em horas, contado a partir das 0 h de segunda-feira.

Para efeitos de controlo de pragas, sabe-se que o tratamento deve ser iniciado no primeiro instante t, tal que a temperatura registada exatamente um dia antes seja igual a dois terços da temperatura às 0 horas de segunda-feira.

Determine, com recurso à calculadora gráfica, o instante da semana em que o tratamento deve ser iniciado.
Apresente a resposta com a indicação do dia da semana, das horas e dos minutos em minutos, arredondando os minutos às unidades.

Na sua resposta deve:

- apresentar uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permita(m) resolver a equação;
- apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	**10.**	**11.**	**Total**
10	20	15	15	15	10	20	20	15	20	10	10	20	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

Caso 1: código constituído por 3 algarismos

- 1.º algarismo: par → 5 possibilidades (0, 2, 4, 6, 8)
- 2.º algarismo: qualquer algarismo de 0 a 9 → 10 possibilidades
- 3.º algarismo: qualquer algarismo de 0 a 9 → 10 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo:

$$5 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^2$$

Caso 2: código constituído por 4 algarismos, todos diferentes

O 2.º algarismo ou pode ser 0 ou 5, pelo que se distinguem dois subcasos.

Subcaso 2.1: 2.º algarismo igual a 0

- 1.º algarismo: ímpar → 5 possibilidades (1, 3, 5, 7, 9)
- 3.º algarismo: 8 possibilidades (excluindo o 0 e o 1.º algarismo)
- 4.º algarismo: 7 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo:

$$5 \times 8 \times 7$$

Subcaso 2.2: 2.º algarismo igual a 5

- 1.º algarismo: ímpar e diferente de 5 → 4 possibilidades (1, 3, 7, 9)
- 3.º algarismo: 8 possibilidades (excluindo o 5 e o 1.º algarismo)
- 4.º algarismo: 7 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo:

$$4 \times 8 \times 7$$

Total do Caso 2

Aplicando o princípio aditivo aos dois subcasos:

$$5 \times 8 \times 7 + 4 \times 8 \times 7 = (5 + 4) \times 8 \times 7$$

Total de códigos possíveis

Aplicando novamente o princípio aditivo aos dois casos principais:

$$5 \times 10^2 + (5 + 4) \times 8 \times 7$$

Opção (B).

2.1. Pretende-se explicar o significado de cada fator da expressão

$$^{3}C_2 \times {}^{4}A_2 \times 4 \times {}^{5}A_2$$

- $^{3}C_2$ corresponde à escolha de 2 alunos, de entre os 3 alunos disponíveis, que irão ocupar os lugares pares.
- $^{4}A_2$ corresponde à distribuição desses 2 alunos pelos 4 lugares pares (2, 4, 6 e 8). A ordem interessa, uma vez que os alunos são distintos.
- 4 corresponde à escolha do lugar ímpar que será ocupado pelo aluno restante, existindo 4 lugares ímpares disponíveis.
- $^{5}A_2$ corresponde à distribuição dos 2 professores pelos 5 lugares restantes da fila. A ordem interessa, uma vez que os professores são distintos.

Assim, o produto de todos os fatores dá o número total de disposições possíveis que respeitam todas as condições do problema.

2.2. Na escola existem 100 alunos e 20 professores, perfazendo um total de 120 pessoas.

Pretende-se determinar o número de seleções possíveis de 3 pessoas, sabendo que pelo menos duas são alunos.

Esta condição pode ser satisfeita em dois casos distintos.

Caso 1: exatamente 2 alunos e 1 professor

- Escolha dos 2 alunos $^{100}C_2$

  Escolha do 1 professor: $^{20}C_1$

Número de seleções neste caso: $^{100}C_2 \times {}^{20}C_1$

Caso 2: exatamente 3 alunos

- Escolha dos 3 alunos: $^{100}C_3$

Total de seleções possíveis

Aplicando o princípio aditivo, obtém-se: $^{100}C_2 \times {}^{20}C_1 + {}^{100}C_3 = 260\,700$

3. Seja n o número de filtros distintos disponíveis na aplicação.

Cada efeito resulta da aplicação de dois filtros distintos, em que a ordem é relevante.

Sabe-se que ${}^{n}A_2 = 420$.

Assim:

$${}^{n}A_2 = 420 \Leftrightarrow n \times (n-1) = 420 \Leftrightarrow n^2 - n - 420 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 1 \times 420}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -20 \vee n = 21$$

Como n representa um número de filtros, tem de ser positivo, logo

$n = 21$.

4.

Um vetor diretor de s é $(1, 2)$, logo a inclinação da reta s é $m_s = 2$.

Como $(0, 0)$ pertence a s, a equação reduzida de s é: $y = 2x$.

O ponto P pertence à reta s e tem abcissa c.

Substituindo $x = c$ na equação reduzida de s, obtém-se $y = 2c$.

Logo,

$P(c, 2c)$

Sabe-se que a reta r interseta o eixo das abcissas no ponto de abcissa $2c$, isto é, no ponto $A(2c, 0)$.

Como a reta r passa pelos pontos $P(c, 2c)$ e $A(2c, 0)$.

O declive de r é:

$$m_r = \frac{0 - 2c}{2c - c} = \frac{-2c}{c} = -2$$

Assim, a inclinação de r, α, é:

$\alpha = \tan^{-1}(-2) + \pi \approx 2{,}03 \text{ rad}$

5. $\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 + 9 - 2 \times 2 = 10$

Opção (B).

6. Seja r o raio da circunferência.

Como $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, tem-se que $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.

Assim, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$, tem-se que:

$$\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(B\hat{A}C) = 16 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times r \times \frac{r}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 16 \Leftrightarrow r^2 = 16$$

Logo, $r = \sqrt{16} = 4$.

Assim, a área da região colorida é dada pela diferença entre a área de um quarto de círculo e a área do triângulo $[ABC]$.

Área da região sombreada:

$\frac{\pi \times 4^2}{4} - \frac{4 \times 4}{2} = 4\pi - 8 \approx 4{,}57$ u. a.

7.

- $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(2,-1) + \beta(1,2) = (2\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta)$
- $\vec{w} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow (2\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta) \cdot (1,-1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta + \alpha - 2\beta = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 3\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 3\alpha$

  Como $\alpha + \beta = 1$, tem-se:

  $\alpha + 3\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{3}{4}$
- Logo, $\vec{w} = \left(2 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4}, -\frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$
- $\vec{u} + \vec{v} = (2,-1) + (1,2) = (3,1)$
- $\cos(\vec{w} \,\hat{,}\, (\vec{u} + \vec{v})) = \frac{\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{\|\vec{w}\| \times \|\vec{u} + \vec{v}\|} = \frac{5}{\frac{5}{4}\sqrt{2} \times \sqrt{10}}$

  $$\vec{w} \,\hat{,}\, (\vec{u} + \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\frac{5}{4}\sqrt{2} \times \sqrt{10}}\right) \approx 27°$$

$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \cdot (3,1) = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} = 5$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

8.1.

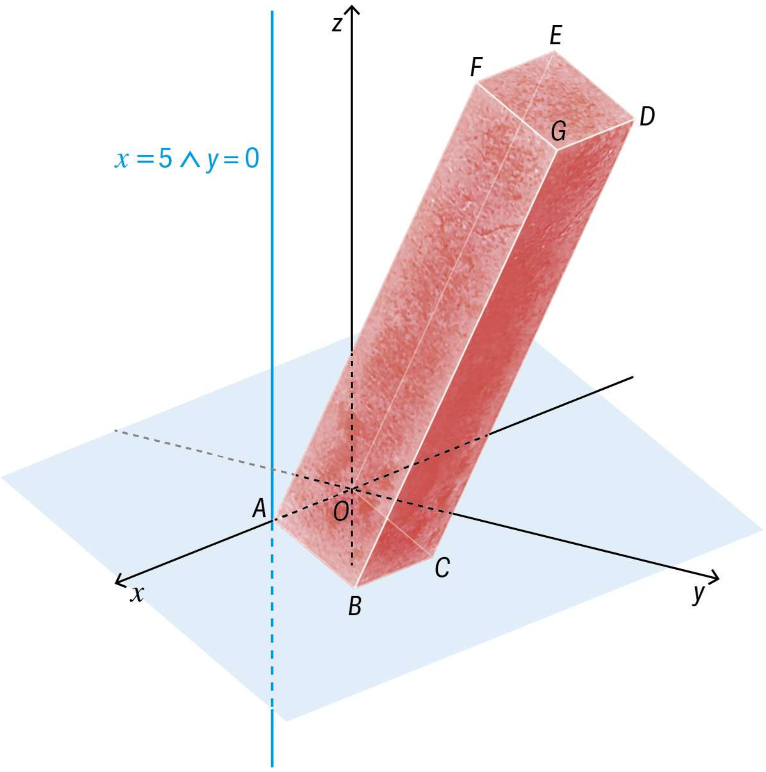
I. Os planos definidos por $y + 2z = 0$ e $y + 2z = 1$ são estritamente paralelos por terem o mesmo vetor normal e por não conterem os mesmos pontos – a origem, por exemplo, pertence apenas ao plano OAB.

II. A reta de equação $x = 5 \wedge y = 0$ tem vetor diretor $\vec{r}(0, 0, 1)$. Como o vetor normal ao plano OAB é $\vec{n}(0, 1, 2)$, vem que:

- $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são perpendiculares uma vez que $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 + 0 + 2 = 2 \neq 0$.
- $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são colineares uma vez que $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{2}$.

Assim, a reta é oblíqua ao plano OAB.

Em alternativa, podia ter-se representado a reta definida por $x = 5 \wedge y = 0$ no referencial dado e observava-se que era oblíqua ao plano OA.



III. A distância de G ao plano OAB é igual a $\overline{OE}$.

I. a)

II. b)

III. b)

8.2.

Equação da reta perpendicular a OAB que passa em G:

$(x, y, z) = (5,14,18) + k(0,1,2), k \in \mathbb{R}$

Determinação das coordenadas do ponto B que é a interseção de OAB com a reta BG:

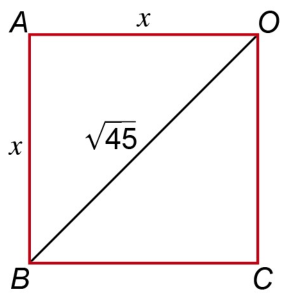
Ponto genérico de BG: $(x, y, z) = (5;\ 14 + k;\ 18 + 2k), k \in \mathbb{R}$

Substituindo este ponto genérico na equação de OAB, $y + 2z = 0$, tem-se:

$14 + k + 2(18 + 2k) = 0 \Leftrightarrow 14 + k + 36 + 4k = 0 \Leftrightarrow 5k = -50 \Leftrightarrow k = -10$

Assim, $B = \left(5;\ 14 - 10;\ 18 + 2 \times (-10)\right) = (5;\ 4;\ -2)$

Determinação da área da base $[OABC]$:



$\overline{OB} = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{45}$

E, pelo Teorema de Pitágoras, designando por x o comprimento do lado do quadrado $[OABC]$, tem-se que a sua área é x^2:

$x^2 + x^2 = \overline{OB}^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{45}{2}$

Determinação da altura do prisma, $\overline{BG}$

$\overline{BG} = \sqrt{(5 - 5)^2 + (14 - 4)^2 + (18 + 2)^2} = 10\sqrt{5}$

Determinação do volume do prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$:

$V = \frac{45}{2} \times 10\sqrt{5} = 225\sqrt{5}$ u. v.

9. Como a função f é periódica e a diferença entre um maximizante e um minimizante consecutivos é 12 unidades de tempo, o período fundamental, P_0, é $2 \times 12 = 24$ unidades de tempo.
Assim, das opções dadas, apenas $48 = 2 \times P_0$ é período da função f.

Opção (D).

10.

- $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

  $0 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

  $D'_f = [0, 2]$

  Verdadeira.

- $P_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

  Verdadeira.

- $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

  Verdadeira.

- $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$

  O gráfico de f obtém-se a partir do gráfico de $y = \sin\, x$ por contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ seguido de uma translação associada ao vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

  Falsa.

  Opção (D).

11. Quer-se determinar a abcissa da primeira solução da equação

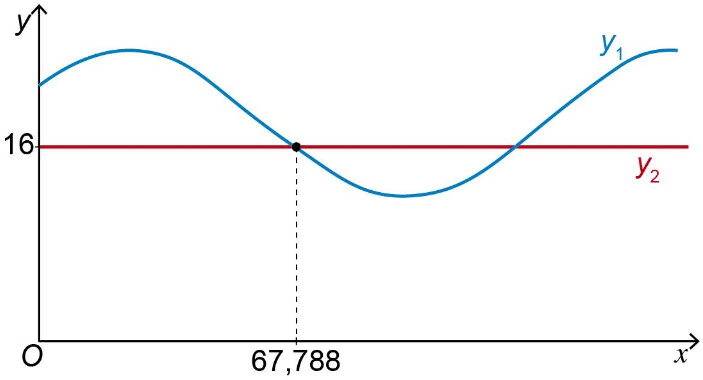
$T(t-24)=\frac{2}{3}T(0)$, em $[0,168]$

$7\times 24=168$ horas por semana

$T(0)=6\cos(0)+18=24\ °\text{C}$

$\frac{2}{3}T(0)=\frac{2}{3}\times 24=16\ °\text{C}$

$$\underbrace{6\cos\left(\frac{\pi}{72}(t-24)\right)+18}_{y_1}=\underbrace{16}_{y_2}$$



$67{,}788-2\times 24=19{,}788$ horas – o tratamento é iniciado na quarta-feira.

$0{,}788$ horas $=0{,}788\times 60$ minutos ≈ 47 minutos

O tratamento deve ser iniciado na quarta-feira, pelas 19 horas e 47 minutos.