1.1. Opção **(B)**

1.2. Casos possíveis: ${}^{8}C_3$

Casos favoráveis: ${}^{4}C_3 + {}^{4}C_3$

Logo, a probabilidade é igual a $\frac{{}^{4}C_3 + {}^{4}C_3}{{}^{8}C_3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.

2.1. Com a peça 2 na posição central, o número de maneiras de dispor as três peças é igual a $4 \times 2 \times 4 = 32$.

2.2. Casos possíveis: 32

Casos favoráveis: Podem ficar apenas duas peças com a região pintada em contacto ($1\times 3 + 3 \times 1$ possibilidades) ou as três peças com a região pintada em contacto (1 possibilidade).

Assim, o número de casos favoráveis é $1\times 3 + 3\times 1 + 1 = 7$.

Logo, a probabilidade é igual a $\frac{7}{32}$.

3.1. Seja $p \in \{0, 1, ..., 9\}$: ${}^{9}C_p \times \sqrt{x}^{\,9-p} \times \left(\frac{1}{x}\right)^p = k \times x^0$.

Desenvolvendo o primeiro membro: ${}^{9}C_p \times \sqrt{x}^{\,9-p} \times \left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^{9}C_p \times x^{\frac{9-p}{2}} \times x^{-p} = {}^{9}C_p \times x^{\frac{9-3p}{2}}$

Pretende-se: $\begin{cases} \frac{9-3p}{2} = 0 \\ {}^{9}C_p = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ {}^{9}C_3 = k \end{cases}$. Então, $k = 84$.

84 é o termo independente de x.

3.2. Opção **(D)**

4. Sabe-se que $P(A \mid B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(B)$. Então:

$$P\left(A \cup \overline{B}\right) + \frac{1}{2}P(B) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) + \frac{1}{2}P(B) =$$

$$= P(A) + 1 - P(B) - \left(P(A) - P(A \cap B)\right) + \frac{1}{2}P(B) = 1$$

$$= P(A \cap B) + 1 - \frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{2}P(B) + 1 - \frac{1}{2}P(B) = 1$$

5.1. $f''(x) = \left(\frac{1}{x-1} + x\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2} + 1 = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \wedge (x-1)^2 \neq 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \wedge x \in D_f \Rightarrow x = 2 \qquad \left(D_f = \left]1, +\infty\right[\right)$

Quadro

x	1		2	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	–	0	+
$f(x)$		$\frown$	PI	$\smile$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]2, +\infty\right[$ e para baixo em $\left]1, 2\right[$.

f admite um ponto de inflexão de abcissa 2.

5.2. Opção **(A)**

$$\frac{1}{x-1}+x=3 \Leftrightarrow \frac{1+x^2-x}{x-1}=3 \Leftrightarrow 1+x^2-x=3x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$y=3\times 2-4=2$

$T(2,\ 2)$

6.1. Sendo x a abcissa do ponto P, então $\overline{OQ}=2x$.

Assim:

$$A(x)=\frac{1}{2}\left(2x\times\frac{1}{(x+1)^2}\right)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

6.2. $$A'(x)=\left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(x+1)^2-x\times 2(x+1)}{(x+1)^4}\underset{x\neq -1}{=}\frac{x+1-2x}{(x+1)^3}=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

$$A'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{(x+1)^3}=0 \Leftrightarrow x=1 \wedge x\neq -1$$

Quadro:

x	0		1	$+\infty$
$A'(x)$	n.d.	+	0	–
$A(x)$	n.d.	↗	$\frac{1}{4}$	↘

A função A é monótona crescente em $]0,1[$ e monótona decrescente em $]1,+\infty[$.

$A(1)=\frac{1}{4}$, logo o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode tomar é $\frac{1}{4}$.

7. Se a reta de equação $x=-\frac{4}{3}$ é uma assíntota vertical do gráfico de f então, sendo f uma função contínua no seu domínio, tem-se $-\frac{1}{a}=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$

$$\therefore f(x)=\frac{x^2+5}{\frac{3}{4}x+1}$$

Sendo $y=mx+b$ a equação reduzida da assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$, então:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{\frac{3}{4}x^2+x}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{4}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{\frac{3}{4}x+1}-\frac{4}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+15-3x^2-4x}{\frac{9}{4}x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x+15}{\frac{9}{4}x+3}\right)=-\frac{4}{\frac{9}{4}}=-\frac{16}{9}$$

A reta de equação reduzida $y=\frac{4}{3}x-\frac{16}{9}$ é a assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

8. Se é possível aplicar o Teorema de Bolzano-Cauchy para mostrar que a equação $f(x)=\sqrt{5}$ tem uma solução no intervalo $]0, 1[$, então a função f tem de ser contínua em $[0,1]$, logo:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = b$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow a+1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$

9. $A\left(a,\sqrt{a+1}\right)$ e $B(a,a)$

Como, para $a \in]0,1[$, $\sqrt{a+1} > a$ e como os pontos A e B têm a mesma abcissa, então:

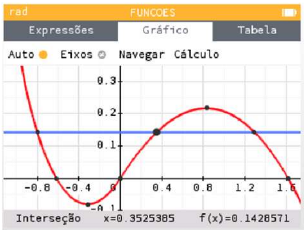
$\overline{AB} = \sqrt{a+1}-a$

A área do triângulo $[OAB]$ é igual a $\frac{1}{7}$, ou seja:

$\frac{\overline{AB}\times a}{2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a+1}-a\right)\times a}{2} = \frac{1}{7}$

Sejam $y_1 = \frac{\left(\sqrt{a+1}-a\right)\times a}{2}$ e $y_2 = \frac{1}{7}$.

Graficamente:



As coordenadas do ponto de interseção dos gráficos, cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 1[$, são, aproximadamente, $(0{,}35; 0{,}14)$

Logo, $a \approx 0{,}35$.