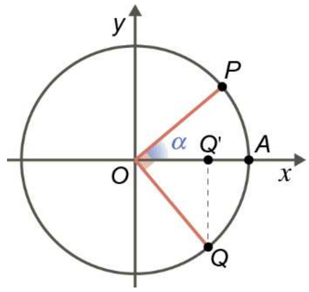
1.1. Opção **(C)**



Seja Q' a projeção de Q em Ox.

Como $\overline{QQ'} = \frac{2}{3}$, logo $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) = \frac{2}{3}$.

Assim, $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1.2. **a)** $\overline{Q'P'} = \overline{OP'} - \overline{OQ'} = \cos\alpha - \overline{OQ'}$.

Como $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{OQ'}$, então $\sin\alpha = \overline{OQ'}$, pelo que podemos concluir que $\overline{Q'P'} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

b) Se $\overline{Q'P'} = 0$ então:

$\cos\alpha = \sin\alpha \wedge \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$P_{[QOP]} = 2 + \overline{PQ}$ Ora $\overline{PQ} = 2\sin\alpha \wedge \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{2}$

$\therefore P_{[QOP]} = 2 + \sqrt{2}$

2.1. Como o ponto C pertence ao gráfico da função f, se $x_C = -3$ então $y_C = 3$.

Como a mediatriz de $[CD]$ é perpendicular ao gráfico de f, o seu declive é igual a $\frac{3}{2}$ pelo que a sua equação reduzida será da forma $y = \frac{3}{2}x + b$.

Seja M o ponto médio de $[CD]$. Então, $M\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ pertence à mediatriz. Logo, $b = \frac{17}{4}$.

$\therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$

2.2. Calculando $\overline{ED}$, obtém-se: $\overline{ED} = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} = \|\overrightarrow{CD}\|$

Por outro lado: $\|\overrightarrow{CB}\| = \overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = \sqrt{(-6-0)^2 + (5-1)^2} - \sqrt{5} = \sqrt{52} - \sqrt{5}$

Sendo o triângulo $[DCE]$ equilátero, $D\hat{C}B = 120^\circ$ e $\cos\left(D\hat{C}B\right) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\frac{1}{2}$

Finalmente:

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\left(D\hat{C}B\right) = \sqrt{5} \times \left(\sqrt{52} - \sqrt{5}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2\sqrt{65} - 5\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - \sqrt{65}$

NOTA: $\sqrt{260} = \sqrt{4 \times 65} = 2\sqrt{65}$

3.1. Opção **(A)**

O plano AEH é paralelo ao plano CGF, logo $AEH: x + z + d = 0$.

Como o ponto E pertence ao plano AEH, então $1 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$

$\therefore AEH: x + z - 3 = 0$

As coordenadas do P são da forma $(0, 0, z)$, logo $z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

$\therefore P(0, 0, 3)$

3.2. Começando por se obter as coordenadas do vetor $\overline{AE}$, obtém-se $\overline{AE} = E - A = (1,6,2) - (1,-1,2) = (0,7,0)$

A reta perpendicular ao plano CGF , à qual pertence o ponto E , pode ser definida pela seguinte equação vetorial: $EF : (x,\ y,\ z) = (1,\ 6,\ 2) + k(1,\ 0,\ 1),\ k \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$(x,\ y,\ z) = (1+k,\ 6,\ 2+k),\ k \in \mathbb{R}$$

O ponto F resulta da interseção da reta EF com o plano CGF :

$1 + k + 2 + k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3$. Para este valor de k , o ponto da reta é $F(-2,\ 6,\ -1)$.

Finalmente, o volume pedido é dado pela expressão:

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \overline{EF}^2 \times \overline{AE} = \left(\sqrt{(1-(-2))^2 + (6-6)^2 + (2-(-1))^2}\right)^2 \times 7 = 18 \times 7 = 126$$

4.1. Opção **(A)**

4.2. A **resposta 1** baseia o seu raciocínio na exclusão dos casos em não existem bolas da mesma cor, ou seja, ao número total de casos (${}^{12}C_3$), vai subtrair-se os casos em que as três bolas são todas amarelas (${}^{8}C_3$) e os casos em que as três bolas são todas azuis (${}^{4}C_3$).

A **resposta 2** considera as duas alternativas favoráveis ao pretendido: retirar-se duas bolas amarelas e uma bola azul (${}^{8}C_2 \times {}^{4}C_1 = {}^{8}C_2 \times 4$) e a este número de casos somam-se os casos em que se retira uma bola amarela e duas azuis (${}^{8}C_1 \times {}^{4}C_2 = 8 \times {}^{4}C_2$).

5.1. Opção **(C)**

5.2. O primeiro requisito, a soma dos quatro dígitos é um número par, indica-nos três possibilidades:

- os quatro algarismos são ímpares;
- os quatro algarismos são pares;
- dois algarismos são ímpares e dois algarismos são pares.

O segundo requisito reduz as possibilidades a duas (os quatro algarismos não podem ser ímpares) e condiciona-as (o algarismo 0 não pode fazer parte do código).

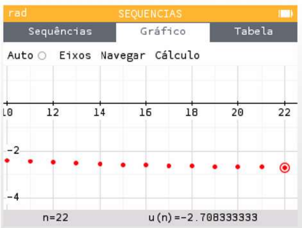
Logo, o número de códigos de acesso é dado pela expressão:

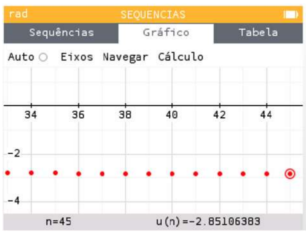
$$4^4 + {}^{4}C_2 \times 5^2 \times 4^2 = 256 + 2400 = 2656$$

6.1 Opção **(D)**

$$u_n = -\frac{23}{10} \Leftrightarrow \frac{1-3n}{n+2} = -\frac{23}{10} \Leftrightarrow 10 - 30n = -23n - 46 \Leftrightarrow 7n = 56 \Leftrightarrow n = 8$$

6.2. Por observação do gráfico, constata-se que o termo de ordem 22 e o termo de ordem 44 são os primeiro e último termos da sucessão, respetivamente, inferiores a $-2{,}7$ e superiores a $-2{,}85$.





Logo, o número de termos da sucessão compreendidos entre $-2{,}7$ e $-2{,}85$ é igual a $44 - 22 + 1 = 23$.

7.1 Pode constatar-se que os numeradores das frações são números ímpares, que podem ser gerados pela seguinte expressão:

$1 = 2 \times 1 - 1$

$3 = 2 \times 2 - 1$

$5 = 2 \times 3 - 1$

$7 = 2 \times 4 - 1$

…

$u_n = 2 \times n - 1 = 2n - 1$

Logo:

$f_n(x) = \frac{2n-1}{x}$

7.2. As funções pertencentes à sequência de funções ($f_k(x)$) são funções de proporcionalidade inversa.

Logo, a constante de proporcionalidade é dada pelo produto das coordenadas de um ponto qualquer do seu gráfico, ou seja, a constante é igual a $5 \times 5 = 25$

Deste modo $2k - 1 = 25 \Leftrightarrow k = 13$.