TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1 Uma vez que a circunferência é definida pela equação $(x-1)^2+(y+3)^2=130$, podemos concluir que o raio mede $\sqrt{130}$. Como $\overline{CB}=\overline{CA}$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles e a sua altura divide a base em duas partes iguais.

Seja α a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BA}$, e M o ponto médio do lado $[AB]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=180 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BC}\|\times\|\overrightarrow{BA}\|\times\cos\alpha=180\\ &\Leftrightarrow \sqrt{130}\times 2\|\overrightarrow{BM}\|\times\cos\alpha=180\\ &\Leftrightarrow \sqrt{130}\times 2\|\overrightarrow{BM}\|\times\frac{\|\overrightarrow{BM}\|}{\sqrt{130}}=180\\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{BM}\|^2=90\end{aligned}$$

$\|\overrightarrow{BM}\|>0$, logo $\|\overrightarrow{BM}\|=\sqrt{90}$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{BC}^2=\overline{CM}^2+\overline{BM}^2$.

Logo, $\left(\sqrt{130}\right)^2=\overline{CM}^2+\left(\sqrt{90}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{CM}^2=130-90 \Leftrightarrow \overline{CM}^2=40$.

$\overline{CM}>0$, logo $\overline{CM}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Assim, o valor da área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{2\times\overline{BM}\times\overline{CM}}{2}=\frac{2\sqrt{90}\times 2\sqrt{10}}{2}=2\times 3\sqrt{10}\times\sqrt{10}=$

$=60$ u.a.

1.2 Comecemos por determinar as coordenadas do ponto D.

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(0+3)^2=130 &\Leftrightarrow (x-1)^2=121\\ &\Leftrightarrow x-1=11 \vee x-1=-11\\ &\Leftrightarrow x=12 \vee x=-10\end{aligned}$$

O ponto D tem abcissa positiva, pelo que as suas coordenadas são $(12,0)$.

O ponto C tem coordenadas $(1,-3)$.

O declive da reta DC é igual a $\frac{-3-0}{1-12}=\frac{3}{11}$.

A reta tangente à circunferência no ponto D é perpendicular à reta DC no ponto D, pelo que o seu declive é $-\frac{1}{\frac{3}{11}}=-\frac{11}{3}$.

Desta forma, a sua equação reduzida é da forma $y=-\frac{11}{3}x+b$.

Substituindo as coordenadas do ponto D na equação anterior, obtém-se:

$0=-\frac{11}{3}\times 12+b \Leftrightarrow b=44$

Desta forma, a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto D é $y=-\frac{11}{3}x+44$.

2. Opção (C)

Da equação vetorial da reta r, sabemos que o vetor de coordenadas $(-1, 2)$ é um vetor diretor desta reta, pelo que o declive da reta é dado por $\frac{2}{-1} = -2$.

$\text{tg}^{-1}(-2) \approx -63°$

Logo, o valor da inclinação da reta r, em graus e arredondado às unidades, é $-63° + 180° = 117°$.

3.

3.1 Opção (C)

O vetor de coordenadas $(2, -1, 2)$ é um vetor normal ao plano α.

Pretende-se identificar a equação de um plano perpendicular ao plano α, pelo que os respetivos vetores normais devem ser perpendiculares. Portanto, o produto escalar entre os vetores normais aos planos definidos em cada uma das opções e o vetor de coordenadas $(2, -1, 2)$ deve ser nulo.

Desta forma:

(A) $(2, -1, 2) \cdot (2, -1, 2) = 4 + 1 + 4 = 9 \neq 0$

(B) $(-2, 1, -3) \cdot (2, -1, 2) = -4 - 1 - 6 = -11 \neq 0$

(C) $(1, -2, -2) \cdot (2, -1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$

(D) $(-2, -6, -1) \cdot (2, -1, 2) = -4 + 6 - 2 = 0$

Assim, apenas as equações apresentadas nas opções (C) e (D) representam planos perpendiculares ao plano α.

Verifiquemos agora em qual das duas opções o ponto de coordenadas $(-2, 1, -3)$ é ponto do plano:

(C) $-2 - 2 \times 1 - 2 \times (-3) - 2 = 0 \Leftrightarrow -2 - 2 + 6 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

(Proposição verdadeira)

(D) $-2 \times (-2) - 6 \times 1 - (-3) + 12 = 0 \Leftrightarrow 4 - 6 + 3 + 12 = 0 \Leftrightarrow 13 = 0$

(Proposição falsa)

Assim, a equação $x - 2y - 2z - 2 = 0$ define um plano perpendicular ao plano α que passa no ponto de coordenadas $(-2, 1, -3)$.

3.2 Comecemos por determinar as coordenadas do ponto I, projeção ortogonal do ponto C no plano α.

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que contém o centro da superfície esférica é $(x, y, z) = (1, -2, 3) + k(2, -1, 2), k \in \mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico desta reta é da forma $(1 + 2k, -2 - k, 3 + 2k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta na equação do plano α, obtém-se:

$2(1+2k)-(-2-k)+2(3+2k)+8=0$

$\Leftrightarrow 2+4k+2+k+6+4k+8=0$

$\Leftrightarrow 9k=-18$

$\Leftrightarrow k=-2$

Assim, $I\big(1+2\times(-2),-2-(-2),3+2\times(-2)\big)$, ou seja, $I(-3,0,-1)$.

O ponto I é ponto médio de $[CP]$, logo $(-3,0,-1)=\left(\frac{x_P+1}{2},\frac{y_P-2}{2},\frac{z_P+3}{2}\right)$.

Assim, $\frac{x_P+1}{2}=-3 \wedge \frac{y_P-2}{2}=0 \wedge \frac{z_P+3}{2}=-1$

$\Leftrightarrow x_P=-7 \wedge y_P=2 \wedge z_P=-5$

Desta forma, P tem coordenadas $(-7,2,-5)$.

4. Pretende-se determinar quantos números ímpares de sete algarismos se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 9 552 048. Uma vez que se pretendem números ímpares, existem duas alternativas mutuamente exclusivas: os números terminarem em 5 ou os números terminarem em 9.

Na primeira alternativa, existem cinco opções para posicionar o algarismo 0 e, para cada uma destas, existem 5! formas distintas de permutar a ordem dos restantes algarismos. Ou seja, existem 5 × 5! = 600 números terminados em 5.

Na segunda alternativa, existem novamente cinco opções para posicionar o algarismo 0 e, para cada uma destas formas, existem $\frac{5!}{2!}$ formas distintas de permutar a ordem dos restantes, em que dois algarismos são iguais. Ou seja, existem $5\times\frac{5!}{2}=300$ números terminados em 9.

Assim, a resposta é 600 + 300 = 900.

5.

5.1 É possível formar ${}^{12}C_4$ grupos de quatro pessoas escolhidas de entre os 12 colaboradores. Se a este número retirarmos o número de grupos de quatro pessoas escolhidas de entre os 12 colaboradores dos quais o Rodrigo e o Guilherme fazem parte simultaneamente, ${}^{2}C_2\times{}^{10}C_2$, obtemos o número de grupos diferentes que podem ser formados, de modo que o Rodrigo e o Guilherme não sejam escolhidos simultaneamente para o painel, ou seja, ${}^{12}C_4-{}^{2}C_2\times{}^{10}C_2=450$.

5.2 Opção (D)

$2!\times 4!\times 6!\times 3!=207\,360$

6. Seja $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ o número de estudantes desta faculdade. Sabe-se que 55% dos estudantes participam dos projetos de investigação, isto é, $0{,}55n$. Assim, $0{,}45n$ estudantes participam em projetos de sustentabilidade.

$$
\begin{aligned}
{}^{n}C_2 - 0{,}55n \times 0{,}45n = 4879 &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} - 0{,}2475n^2 = 4879 \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} - 0{,}2475n^2 = 4879 \\
&\Leftrightarrow n^2 - n - 0{,}495n^2 = 9758 \\
&\Leftrightarrow 0{,}505n^2 - n - 9758 = 0 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 0{,}505 \times (-9758)}}{2 \times 0{,}505} \\
&\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 140{,}4}{1{,}01} \\
&\Leftrightarrow n = \frac{1-140{,}4}{1{,}01} \vee n = \frac{1+140{,}4}{1{,}01} \\
&\Leftrightarrow n = -\frac{13\,940}{101} \vee n = 140
\end{aligned}
$$

Como $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, n = 140$.

O número de estudantes desta faculdade é 140.

$0{,}45 \times 140 = 63$, logo o número de estudantes que participam nos projetos de sustentabilidade é 63.

7. Existem ${}^{12}C_9$ formas distintas de escolher nove divisórias de entre as 12 disponíveis, para serem ocupadas pelas nove cápsulas de café. Para cada uma destas, existem ${}^{9}A_2$ maneiras de escolher, ordenadamente, duas divisórias de entre as nove selecionadas, para dispor as duas cápsulas de cor azul e cinzenta. Por fim, existem ${}^{7}C_4$ maneiras de escolher quatro das sete divisórias restantes para colocar as cápsulas vermelhas, sem que a ordem importe, existindo apenas uma forma de dispor as três cápsulas pretas nas três divisórias sobrantes.

8. **Opção (A)**

$u_2 = 3u_1 - 1 \Leftrightarrow u_2 = 3 \times 2 - 1 \Leftrightarrow u_2 = 5$

$u_3 = 3u_2 - 2 \Leftrightarrow u_3 = 3 \times 5 - 2 = 13$

$v_n = u_3 \Leftrightarrow 5 + 2n = 13 \Leftrightarrow 2n = 8 \Leftrightarrow n = 4$

9. $u_9 - u_3 = 12 \Leftrightarrow u_3 + 6r - u_3 = 12 \Leftrightarrow 6r = 12 \Leftrightarrow r = 2$

$$
\begin{aligned}
u_3 \times u_9 = 160 &\Leftrightarrow u_3 \times (u_3 + 6 \times 2) = 160 \\
&\Leftrightarrow u_3 \times (u_3 + 12) = 160 \\
&\Leftrightarrow (u_3)^2 + 12u_3 - 160 = 0 \\
&\Leftrightarrow u_3 = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times (-160)}}{2 \times 1}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow u_3 = \frac{-1\ \pm 28}{2}$

$\Leftrightarrow u_3 = \frac{-12-28}{2} \vee u_3 = \frac{-12+2}{2}$

$\Leftrightarrow u_3 = -20 \vee u_3 = 8$

(u_n) é uma sucessão de termos positivos, logo $u_3 = 8$.

$u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow 8 = u_1 + 2 \times 2 \Leftrightarrow u_1 = 4$

$u_n = 4 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 2$

$u_n = 172 \Leftrightarrow 2n + 2 = 172 \Leftrightarrow 2n = 170 \Leftrightarrow n = 85$

172 é o termo de ordem 85 da sucessão (u_n).

10. Opção (B)

(v_n) é uma progressão geométrica, logo $v_7 = v_2 \times r^5 \Leftrightarrow 128 = 4 \times r^5 \Leftrightarrow r^5 = 32 \Leftrightarrow r = 2$.

Assim, $v_4 = v_2 \times r^2 \Leftrightarrow v_4 = 4 \times 2^2 \Leftrightarrow v_4 = 16$.