

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 0,12 + 0,44 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 0,56$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(A) = 1 - 0,56 \Leftrightarrow P(A) = 0,44$$

2. Número de casos favoráveis: ${}^{24}C_4 = 10\,626$

$$\text{Número de casos possíveis: } {}^{24}C_4 - {}^8C_4 - {}^{16}C_1 \times {}^8C_3 = 9660$$

$$\text{A probabilidade pedida é igual a } \frac{9\,660}{10\,626} = \frac{10}{11}.$$

3. Opção (C)

Uma vez que as bolas numeradas com número primo são azuis, concluímos que as bolas numeradas com os números 2, 3, 5, 7 e 11 são azuis e, portanto, que existem cinco bolas azuis e seis bolas brancas ($11 - 5 = 6$).

$P(\bar{B}|A)$ representa a probabilidade de, no contexto descrito, a segunda bola retirada não ser branca, sabendo que a primeira bola retirada é azul.

Como já foi retirada uma bola, restam 10 bolas na caixa, o que corresponde ao número de casos possíveis. Como se pretende que a segunda bola retirada não seja branca, ou seja, que seja azul, e tendo em consideração que já foi retirada uma bola azul, o número de casos favoráveis é 4.

$$\text{Assim, } P(\bar{B}|A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

4.

4.1 Opção (C)

$$\begin{aligned} \text{tmv}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &= \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \frac{2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(2 - \cos\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\pi} = \\ &= \frac{2 - \cos(\pi) + 1 - (2 - \cos(-\pi) + (-1))}{\pi} = \\ &= \frac{2 - (-1) + 1 - (2 - (-1) - 1)}{\pi} = \\ &= \frac{4 - 2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$4.2 \quad f(x) = 1 \Leftrightarrow 2 - \cos(2x) + \text{sen}x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + \text{sen}x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - (1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) + \text{sen}x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - (1 - 2\text{sen}^2 x) + \text{sen}x = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\text{sen}^2 x + \text{sen}x = 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee 2\operatorname{sen} x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \operatorname{sen} x &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi &\vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$x \in]-\pi, \pi[$, pelo que as soluções da equação são $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ e 0 , obtidas para $k = 0$.

Assim, as abcissas dos pontos do gráfico de f , pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi[$, cuja ordenada é 1 , são $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ e 0 .

5.

5.1 De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir, acerca das coordenadas dos pontos A , C e B , que:

$A(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, $C(1, \operatorname{tg} \alpha)$ e $B(\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha)$.

Seja D a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Ox . A área do triângulo $[OAB]$ pode ser calculada por $\frac{\overline{AB} \times \overline{DO}}{2}$.

Desta forma, a área do triângulo $[OAB]$ é dada, em função de α , por:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \times (-\cos \alpha)}{2} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha}{2} = \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha}{2} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha}{2} = \\ &= \frac{2\operatorname{sen} \alpha - 2\operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha}{4} = \\ &= \frac{2\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{4} \end{aligned}$$

5.2 $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \frac{25}{16} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{16}{25} \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \pm \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\cos \alpha < 0, \text{ logo } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{Assim, } A(\alpha) = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{4} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{4} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{27}{50}.$$

6. Opção (B)

Observando o gráfico da função f podemos relacionar a monotonia de f com o sinal da primeira derivada.

Sejam, a , b e c ($a \in \mathbb{R}^-$, b e $c \in \mathbb{R}^+$ e $b < c$) os valores de x para os quais a função apresenta extremos.

Assim, podemos concluir o seguinte:

| x | $-\infty$ | a | | b | | c | $+\infty$ |
|----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|
| Varição de f | \searrow | Mínimo relativo | \nearrow | Máximo relativo | \searrow | Mínimo relativo | \nearrow |
| Sinal de f' | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

O

único gráfico que está de acordo com o apresentado na tabela é o gráfico da opção (B).

7.

7.1 f é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \sqrt{4-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(2 + \sqrt{4-x})}{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(2 + \sqrt{4-x})}{4 - (4-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(2 + \sqrt{4-x})}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times (2 + \sqrt{4-x}) \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + \sqrt{4-x}) = \\ &= 1 \times (2 + \sqrt{4-0}) = 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \cos^2 0 - 0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

Assim, f é contínua em $x = 0$.

7.2 Em $]0, \pi]$:

$$f'(x) = (\cos^2 x - x + 3)' = -2\text{sen}x \cos x - 1 = -\text{sen}(2x) - 1$$

$$f''(x) = (-\text{sen}(2x) - 1)' = -2\cos(2x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$x \in]0, \pi]$:

$$k = 0: x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \in]0, \pi]$$

$$k = 1: x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \frac{3\pi}{4} \in]0, \pi]$$

$$k = 2: x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{5\pi}{4} \notin]0, \pi]$$

No intervalo $]0, \pi]$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$

| x | 0 | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | π |
|-------------------------------|------|--------|-----------------|--------|------------------|--------|----------|
| Sinal de f'' | n.d. | - | 0 | + | 0 | - | - |
| Concavidade do gráfico de f | n.d. | \cap | P.l. | \cup | P.l. | \cap | $f(\pi)$ |

Assim, no intervalo $]0, \pi]$, o gráfico de f apresenta:

- concavidade voltada para baixo em $]0, \frac{\pi}{4}]$ e em $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$;
- concavidade voltada para cima em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$;
- dois pontos de inflexão, de abcissas $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Cálculos auxiliares

- f'' é contínua em $]0, \pi]$;
- $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$
- $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos(\pi) = -2 \times (-1) = 2 > 0$
- $f''(\pi) = -2\cos(2\pi) = -2 \times 1 = -2 < 0$

8.

8.1 $g'(0) = \text{sen}(2 \times 0) + 0 + 1 \Leftrightarrow g'(0) = 1$, pelo que o declive da reta r é 1.

Uma vez que as retas r e s são perpendiculares, o declive da reta s é $-\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{1} = -1$.

Desta forma, a reta s pode ser definida por $y = -x + b$.

O ponto A é o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox , logo $0 = -x_A + b \Leftrightarrow x_A = b$.

O ponto B é o ponto de interseção da reta s com o eixo Oy , logo $y_B = 0 + b \Leftrightarrow y_B = b$.

Como o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 8, tem-se que $\frac{-b \times (-b)}{2} = 8 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4$.

O ponto A tem abcissa negativa, logo $b = -4$, de onde resulta que a ordenada do ponto B é -4 .

$$\begin{aligned}
8.2 \quad a &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(g'(x))^2 - (g'(-\frac{\pi}{4}))^2}{(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})(2x - \frac{\pi}{2})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(g'(x) - g'(-\frac{\pi}{4}))(g'(x) + g'(-\frac{\pi}{4}))}{2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})(x - \frac{\pi}{4})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{(g'(x) - g'(-\frac{\pi}{4}))(g'(x) + g'(-\frac{\pi}{4}))}{(x + \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{g'(x) - g'(-\frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}} \times \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{g'(x) + g'(-\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times \frac{g'(-\frac{\pi}{4}) + g'(-\frac{\pi}{4})}{-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times \frac{2g'(-\frac{\pi}{4})}{-\frac{\pi}{2}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times \frac{2(\text{sen}(2 \times (-\frac{\pi}{4})) - \frac{\pi}{4} + 1)}{-\frac{\pi}{2}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times \frac{2(\text{sen}(-\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4} + 1)}{-\frac{\pi}{2}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times \frac{2(-1 - \frac{\pi}{4} + 1)}{-\frac{\pi}{2}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) \times 1 = \\
&= g''(-\frac{\pi}{4}) = \\
&= 2\cos\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + 1 = \\
&= 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = \\
&= 2 \times 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$g''(x) = (\text{sen}(2x) + x + 1)' = 2\cos(2x) + 1$$

9. Opção (D)

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^4 = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^4 = e^4$$