**Teste de Matemática A**

2025 / 2026

Teste N.º 3

**Matemática A**

**12.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ________________________________________ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área de um polígono regular**: Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi\, r\, g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\, \pi\, r^2$ ($r$ – raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3$ ($r$ – raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

## Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

## Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja $E$, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória, e sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}12$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}44$

Qual é o valor de $P(A)$?

**(A)** 0,44 **(B)** 0,48 **(C)** 0,52 **(D)** 0,56

2. Num congresso tecnológico promovido por uma universidade estão presentes estudantes de vários cursos: 24 frequentam o curso de Engenharia e Gestão Industrial e, destes, 16 frequentam a unidade curricular de Inteligência Artificial.

Dos estudantes de Engenharia e Gestão Industrial presentes no congresso, vão ser escolhidos, ao acaso, quatro para integrar uma equipa de apoio técnico responsável pelo acompanhamento das sessões do congresso.

Qual é a probabilidade de, entre os estudantes selecionados, pelo menos dois frequentarem a unidade curricular de Inteligência Artificial?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 11.

Sabe-se que:

- cada bola tem uma única cor;
- as bolas numeradas com número primo são azuis e as restantes são brancas.

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os acontecimentos:

*A*: “A bola retirada em primeiro lugar é azul.”

*B*: “A bola retirada em segundo lugar é branca.”

Em qual das seguintes opções se encontra valor da probabilidade condicionada $P(\bar{B}|A)$?

**(A)** $\frac{3}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{1}{10}$

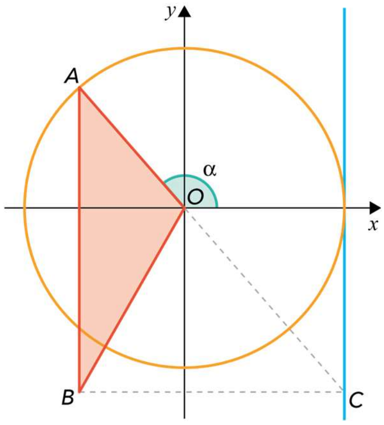
4. Considere a função $f$ domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - \cos(2x) + \operatorname{sen}x$.

**4.1** Qual é a taxa média de variação da função $f$ entre $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$?

**(A)** 0 **(B)** $\frac{1}{\pi}$ **(C)** $\frac{2}{\pi}$ **(D)** $\pi$

**4.2** Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico de $f$ pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi[$, cuja ordenada é 1.

**5.** Na figura estão representados, em referencial o.n. $Oxy$, a circunferência centrada na origem e de raio 1, o triângulo $[OAB]$ e a reta $r$ de equação $x = 1$.




Sabe-se que:

- o ponto $A$ pertence à circunferência;
- o ponto $C$ pertence à reta $r$;
- o ponto $O$ pertence à reta $AC$;
- $\alpha$ é a inclinação, em radianos, da reta $AC$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- a reta $AB$ é paralela ao eixo $Oy$;
- a reta $BC$ é paralela ao eixo $Ox$.

**5.1** Mostre que a área do triângulo $[OAB]$ é dada, em função de $\alpha$, por:

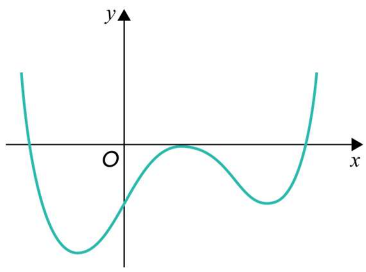
$$A(\alpha) = \frac{2\text{sen}\alpha - \text{sen}(2\alpha)}{4}$$

**5.2** Para uma certa posição do ponto $A$, sabe-se que $\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{3}{4}$.

Sem recurso à calculadora, exceto para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine, para essa posição do ponto $A$, o valor exato da área do triângulo $[OAB]$.

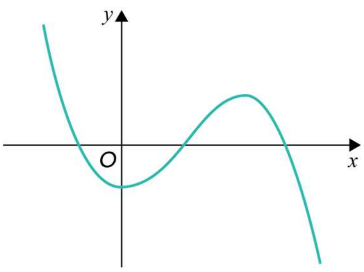
Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

**6.** Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxy$, parte do gráfico de uma função polinomial $f$.

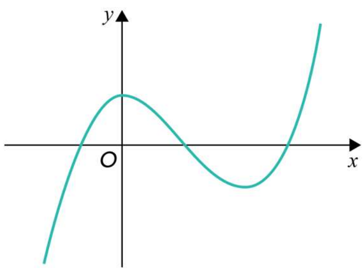



Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função $f'$, primeira derivada da função $f$?

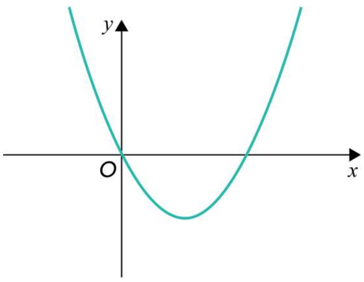
**(A)**



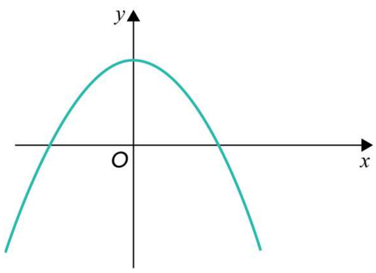

**(B)**




**(C)**




**(D)**



**7.** Seja $f$ a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \sqrt{4-x}} & \text{se } x < 0 \\ \cos^2 x - x + 3 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

**7.1** Averigue se a função $f$ é contínua em $x = 0$.

**7.2** Estude, no intervalo $]0, \pi]$, a função $f$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de gráfico $f$ tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $f$, caso este(s) exista(m).

**8.** Seja $g$ uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada é:

$$g'(x) = \operatorname{sen}(2x) + x + 1$$

Resolva os itens 8.1 e 8.2, sem recorrer à calculadora.

**8.1** Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $0$ e seja $s$ uma reta perpendicular à reta $r$.

Sabe-se que:

- a reta $s$ interseta os eixos $Ox$ e $Oy$ nos pontos $A$ e $B$, respetivamente;
- o ponto $A$ tem abcissa negativa;
- o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 8.

Determine a ordenada do ponto $B$.

**8.2** Seja $a$ um número real tal que $a = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\left(g'(x)\right)^2 - \left(g'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

Determine o valor de $a$.

**9.** Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n}$?

**(A)** $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** $4e$ **(D)** $e^4$

**FIM**

**COTAÇÕES**

| Item | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | | |
| **1.** | **2.** | **3.** | **4.1** | **4.2** | **5.1** | **5.2** | **6.** | **7.1** | **7.2** | **8.1** | **8.2** | **9.** | **TOTAL** |
| 10 | 18 | 10 | 10 | 18 | 20 | 18 | 10 | 20 | 18 | 18 | 20 | 10 | **200** |