Propostas de resolução

1. $\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\overline{A}=\underbrace{\left(A\cap\overline{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=\varnothing\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=\overline{B}\cap\overline{A}=\overline{B\cup A}$.

Como $A\subset B$, então $B\cup A=B$, pelo que $\overline{B\cup A}=\overline{B}$.

Resposta: D

2.1 Como o número tem de ser ímpar, o algarismo das unidades tem de ser ímpar, pelo que para esta posição temos 5 possibilidades. Como o primeiro algarismo não pode ser o 0, restam três posições para colocar os dois zeros, o número de maneiras de o fazer é ${}^{3}C_{2}$. Finalmente, sobram duas posições que têm de ser ocupadas por dois algarismos distintos entre si, distintos de 0 e do algarismo que foi colocado na posição das unidades. Assim, dos restantes oito algarismos, escolhem-se, ordenadamente, dois para as duas posições que sobram. O número de maneiras de o fazer é ${}^{8}A_{2}$.

Logo, a resposta é $5\times{}^{3}C_{2}\times{}^{8}A_{2}=840$.

Resposta: A

2.2 Para formarmos um número de cinco algarismos, temos de escolher cinco entre os dez algarismos disponíveis e, em seguida, distribuir os cinco algarismos pelas cinco posições. Contudo, se queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente ou decrescente, depois de os escolher, há apenas uma maneira de os distribuir para cada um dos casos (crescente ou decrescente). Por exemplo, se escolhermos os algarismos 1, 4, 6, 7 e 9, forma-se o número $14\ 679$, no caso de ficarem por ordem crescente, e forma-se o número $97\ 641$, no caso de ficarem por ordem decrescente.

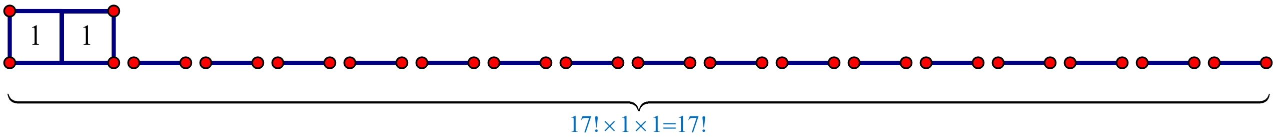
Assim:

- existem ${}^{9}C_{5}$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem crescente. O algarismo 0 não pode ser escolhido, dado que como queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente, o 0 teria de ir para a primeira posição, pelo que o número não teria cinco algarismos, mas sim quatro. Portanto, dos restantes nove algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^{9}C_{5}\times 1={}^{9}C_{5}$ números nestas condições;

- existem ${}^{10}C_{5}$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem decrescente. Dos dez algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^{10}C_{5}\times 1={}^{10}C_{5}$ números nestas condições.

Logo, existem ${}^{9}C_{5}+{}^{10}C_{5}=378$ números de cinco algarismos em que os seus algarismos estão dispostos por ordem crescente ou por ordem decrescente.

3.1 Agrupando os dois vasos num bloco, este bloco e as restantes dezasseis peças perfazem dezassete peças a permutar. Dado que os vasos são iguais, permutando os dois dentro do bloco não gera uma nova disposição, pelo que a resposta ao problema é $17!$.



3.2 Existem dezassete peças distintas (os dois vasos são iguais, pelo que consideramos apenas um para formar um conjunto de seis peças distintas). Assim, das dezassete peças escolhem-se seis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{17}C_6$.

Portanto, existem ${}^{17}C_6 = 12\,376$ maneiras distintas de escolher seis peças distintas para a exposição.

3.3 Começamos por escolher a fila horizontal onde se vão colocar os dois vasos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_1 = 4$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}C_2$ maneiras distintas de escolher dois compartimentos, entre os seis da fila horizontal escolhida, para os dois vasos. Finalmente, como na fila onde ficam os vasos não podem estar outras peças, dos restantes dezoito compartimentos escolhem-se, ordenadamente, dezasseis para colocar as restantes peças. O número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A_{16}$.

Logo, uma expressão que permite determinar o número de disposições possíveis é $4 \times {}^{6}C_2 \times {}^{18}A_{16}$.

4. Sejam n o número de cartas vermelhas em cima da mesa e p o número de cartas pretas em cima da mesa (n e p naturais).

Tem-se:

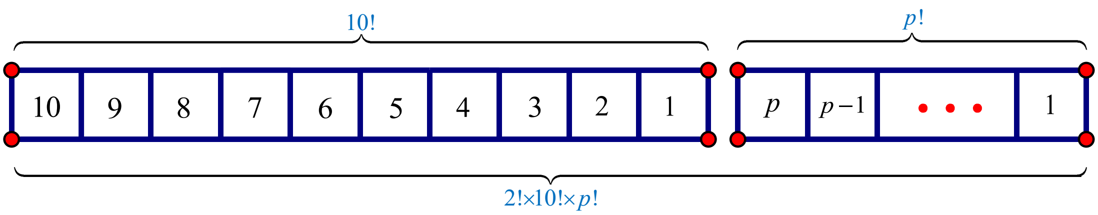
- o número de maneiras de formar um conjunto de duas cartas vermelhas entre as n é dado por ${}^{n}C_2$.

Logo, ${}^{n}C_2 = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-90)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{2} \Leftrightarrow n = -9 \ \vee \ n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 10$, pelo que foram colocadas em cima da mesa dez cartas vermelhas.

- agrupando num bloco as dez cartas vermelhas e agrupando num outro bloco as p cartas pretas, vem:

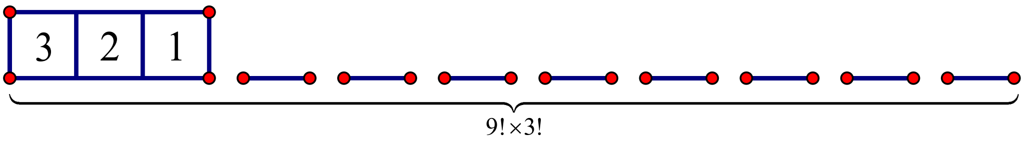


Os dois blocos permutam entre si de $2!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, as dez cartas vermelhas permutam entre si de $10!$ maneiras distintas e as p cartas pretas permutam entre si de $p!$ maneiras distintas. Portanto, o número de maneiras de colocar as cartas em fila de modo que as cartas da mesma cor fiquem em posições consecutivas é dado por $2!\times 10!\times p!$.

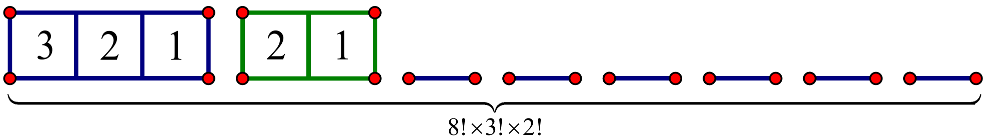
Logo, $2!\times 10!\times p! = 174\,182\,400 \Leftrightarrow p! = \dfrac{174\,182\,400}{2!\times 10!} \Leftrightarrow p! = 24 \Leftrightarrow p = 4$

$\therefore$ Em cima da mesa foram colocadas catorze cartas, dez vermelhas e quatro pretas.

5. Vamos começar por contar todos os casos em que os onze amigos se colocam numa só fila, com a Inês, a Sofia e a Maria em posições consecutivas. Para tal, agrupamos as três num bloco. Esse bloco e os restantes oito amigos permutam entre si de $9!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três permutam entre si de $3!$ maneiras distintas:

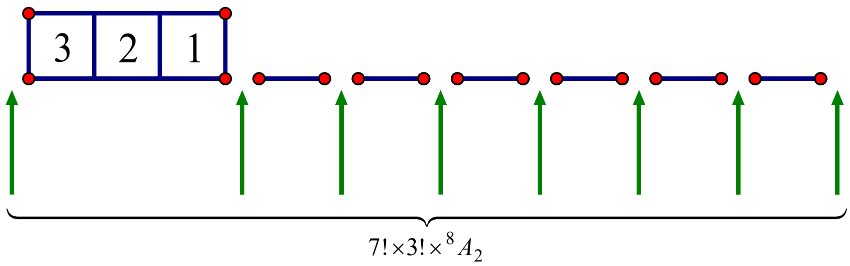


Em seguida, retiramos todos os casos em que os onze amigos se colocam numa só fila, com a Inês, a Sofia e a Maria em posições consecutivas, assim como o Pedro o João em posições consecutivas. Para tal, agrupamos a Inês, a Sofia e a Maria num bloco e também agrupamos o Pedro e o João num outro bloco. Esses dois blocos e os restantes seis amigos permutam entre si de $8!$ maneiras distintas. Dentro do bloco das raparigas, as três permutam entre si de $3!$ maneiras distintas e dentro do bloco dos rapazes, os dois permutam entre si de $2!$ maneiras distintas:



Logo, a resposta a este problema é $9!\times 3! - 8!\times 3!\times 2! = 1\,693\,440$.

Outra resolução: Comecemos por agrupar num bloco a Inês, a Sofia e a Maria. Como o Pedro e o João não podem ficar juntos, então têm de ocupar duas das oito posições entre os restantes seis amigos e o bloco, ou nas pontas. Essas posições que podem ser ocupadas pelo Pedro e pelo João estão assinaladas com as setas verdes na figura seguinte:



Assim, o bloco e os restantes seis amigos permutam entre si de $7!$ maneiras distintas. Dentro do bloco, as três raparigas permutam entre si de $3!$ maneiras distintas. Finalmente, das oito posições que o Pedro e o João podem ocupar, escolhem-se, ordenadamente, duas. O número de maneiras de o fazer é ${}^8A_2$.

Portanto, a resposta ao problema é $7! \times 3! \times {}^8A_2 = 1\,693\,440$.

Resposta: A

6. Tem-se:

$$\underbrace{{}^nC_6 + {}^nC_7}_{{}^{n+1}C_7} + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_{20} \Leftrightarrow \underbrace{{}^{n+1}C_7 + {}^{n+1}C_8}_{{}^{n+2}C_8} = {}^{n+2}C_{20} \Leftrightarrow {}^{n+2}C_8 = {}^{n+2}C_{20} \underset{{}^nC_p = {}^nC_{n-p}}{\Leftrightarrow} n+2-8=20 \Leftrightarrow n=26$$

Logo, a linha n é a linha 26, pelo que a linha $n+1$ é a linha 27 e, portanto, a soma de todos os elementos da linha $n+1$ é $2^{27} = 134\,217\,728$.

7. Se a, b e c são os três elementos centrais de uma linha n do triângulo de Pascal, tal que $a<b$ e $b>c$, então $c=a$ e b é o maior elemento da linha (elemento central).

Consideremos a seguinte figura:

Linha												
n			1	………	a		b		c	………	1	
$n+1$		1	………………		$a+b$			$b+c$		………………		1
$n+2$	1	………………………………				$a+2b+c$			………………………………			1

Logo, o elemento central da linha $n+2$ é $a+2b+c \underset{c=a}{=} a+2b+a = 2a+2b$.

Resposta: B

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

8. A forma geral dos termos do desenvolvimento do binómio $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{x^2}\right)^{19}$ é ${}^{19}C_p \times \left(\sqrt{x}\right)^{19-p} \times \left(-\frac{a}{x^2}\right)^p$, com p inteiro e $0 \le p \le 19$.

Assim, ${}^{19}C_p \times \left(\sqrt{x}\right)^{19-p} \times \left(-\frac{a}{x^2}\right)^p = {}^{19}C_p \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{19-p} \times (-a)^p \times \frac{1}{\left(x^2\right)^p} = {}^{19}C_p \times (-a)^p \times \frac{x^{\frac{19-p}{2}}}{x^{2p}} =$

$$= {}^{19}C_p \times (-a)^p \times x^{\frac{19-p}{2}-2p} = {}^{19}C_p \times (-a)^p \times x^{\frac{19-5p}{2}}$$

O termo de segundo grau é o termo com parte literal igual a x^2. Assim, fazendo $\frac{19-5p}{2}=2$, vem $19-5p=4 \Leftrightarrow -5p=-15 \Leftrightarrow p=3$, pelo que o coeficiente do termo de segundo grau é ${}^{19}C_3 \times (-a)^3$.

Portanto, ${}^{19}C_3 \times (-a)^3 = 7752 \Leftrightarrow -969a^3 = 7752 \Leftrightarrow a^3 = \frac{7752}{-969} \Leftrightarrow a^3 = -8 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow a = -2$.

Resposta: B

9. Tem-se que ${}^nC_3 - {}^nC_7 = 0 \Leftrightarrow {}^nC_3 = {}^nC_7 \Leftrightarrow n-3=7 \Leftrightarrow n=10$.

Logo, a forma geral dos termos deste desenvolvimento é ${}^{10}C_p \times \left(\frac{2}{x}\right)^{10-p} \times \left(-x^2\right)^p$, de onde:

$${}^{10}C_p \times \left(\frac{2}{x}\right)^{10-p} \times \left(-x^2\right)^p = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times \frac{1}{x^{10-p}} \times (-1)^p \times \left(x^2\right)^p = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{p-10} \times x^{2p} =$$

$$= {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{p-10+2p} = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{3p-10}$$

Portanto, como se pretende o coeficiente do termo em x^{11}, tem-se $3p-10=11 \Leftrightarrow 3p=21 \Leftrightarrow p=7$.

$\therefore$ O coeficiente do termo em x^{11} é ${}^{10}C_7 \times 2^{10-7} \times (-1)^7 = 120 \times 2^3 \times (-1) = -960$.

Resposta: A

10. Um conjunto de peças de fruta pode ter:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 maçãs. Portanto, para a quantidade de maçãs existente num dado conjunto, temos onze possibilidades;

- 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 laranjas. Portanto, para a quantidade de laranjas existente num dado conjunto, temos sete possibilidades;

- 0, 1, 2, 3 ou 4 bananas. Portanto, para a quantidade de bananas existente num dado conjunto, temos cinco possibilidades.

Logo, como o conjunto a escolher tem de ter pelo menos um elemento, pelo princípio fundamental da contagem, o número de casos possíveis é $11\times 7\times 5-1=384$ (retiramos 1, que corresponde ao conjunto vazio, isto é, ao caso de não se escolherem peças de fruta de qualquer um dos três tipos).

O número de casos favoráveis é $1\times 7\times 3=21$ (para as maçãs, só há uma possibilidade, escolher 5 unidades, para as laranjas há sete possibilidades, escolher 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 unidades, e para as bananas há três possibilidades, escolher 2, 3 ou 4 unidades).

Portanto, a probabilidade pedida é $\frac{21}{384}=\frac{7}{128}$.

11. Os acontecimentos A e B são independentes, pelo que $P(A|B)=P(A)$ e portanto, como $P(A|B)=0{,}7$, tem-se que $P(A)=0{,}7$. Logo:

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+\underset{0,2}{P(B)}-\underbrace{P(\overline{A}\cap B)}_{P(B)-P(A\cap B)}=1-\underset{0,7}{P(A)}+0{,}2-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

$$\underset{\substack{A\,e\,B\text{ são}\\ \text{independentes, logo}\\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}}{=}1-0{,}7+0{,}2-\left(P(B)-P(A)\times P(B)\right)=0{,}5-\left(0{,}2-0{,}7\times 0{,}2\right)=0{,}44$$

Resposta: C

12.1 O número de casos possíveis é ${}^{12}C_4$, que é o número de maneiras de escolher quatro das doze pessoas.

Para o número de casos favoráveis, temos de considerar dois casos disjuntos:

- um homem e três mulheres: ${}^{3}C_1\times{}^{9}C_3$ (dos três homens escolhe-se um, ${}^{3}C_1$, e das nove mulheres escolhem-se três, ${}^{9}C_3$);

- dois homens e duas mulheres: ${}^{3}C_2\times{}^{9}C_2$ (dos três homens escolhem-se dois, ${}^{3}C_2$, e das nove mulheres escolhem-se duas, ${}^{9}C_2$).

Logo, o número de casos favoráveis é ${}^{3}C_1\times{}^{9}C_3+{}^{3}C_2\times{}^{9}C_2$ e a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{3}C_1\times{}^{9}C_3+{}^{3}C_2\times{}^{9}C_2}{{}^{12}C_4}=\frac{8}{11}$$

12.2 Vamos começar por escolher os membros que irão desempenhar os cargos. Para tal, vamos considerar dois casos disjuntos:

- irão desempenhar os cargos um homem e duas mulheres: ${}^3C_1 \times {}^9C_2 \times 3!$ (dos três homens escolhe-se um, ${}^3C_1$, e das nove mulheres escolhem-se duas, ${}^9C_2$. Finalmente, permutam-se os três membros escolhidos pelos três cargos, o número de maneiras de o fazer é $3!$);

- irão desempenhar os cargos dois homens e uma mulher: ${}^3C_2 \times {}^9C_1 \times 3!$ (dos três homens escolhem-se dois, ${}^3C_2$, e das nove mulheres escolhe-se uma, ${}^9C_1$. Finalmente, permutam-se os três membros escolhidos pelos três cargos, o número de maneiras de o fazer é $3!$).

Assim, para desempenhar os cargos, temos ${}^3C_1 \times {}^9C_2 \times 3! + {}^3C_2 \times {}^9C_1 \times 3!$ possibilidades distintas. Para cada uma destas maneiras, falta contabilizar o número de maneiras de escolher os restantes membros da comissão. Portanto, dos restantes nove membros, escolhem-se quatro. Como os quatro irão desempenhar tarefas indiferenciadas, o número de maneiras de os escolher é ${}^9C_4$.

Logo, a resposta a este problema é $\left({}^3C_1 \times {}^9C_2 \times 3! + {}^3C_2 \times {}^9C_1 \times 3!\right) \times {}^9C_4 = 102\,060$.

13. O número de casos possíveis é ${}^{11}C_3$, que é o número de maneiras de escolher três dos onze pontos assinalados.

Para que os três pontos escolhidos definam um plano paralelo ao plano xOy, temos dois casos disjuntos:

- escolhem-se três pontos da face $[ABCD]$, o número de maneiras de o fazer é ${}^4C_3$;

- escolhem-se três pontos da face $[EFGH]$, o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_3$. No entanto, entre estas escolhas, há três que não definem um plano, por serem escolhas com três pontos não colineares, são elas: E, R e H; E, Q e G; H, Q e F. Logo, para este caso temos ${}^6C_3 - 3$ possibilidades.

Portanto, o número de casos favoráveis é ${}^4C_3 + {}^6C_3 - 3$ e a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^4C_3 + {}^6C_3 - 3}{{}^{11}C_3} = \dfrac{7}{55}$

14.1 O número de casos possíveis é ${}^{15}A_7 \times {}^8C_5$. Das quinze posições, escolhem-se, ordenadamente, sete para as sete bolas distintas, o número de maneiras de o fazer é ${}^{15}A_7$, e, para cada uma dessas maneiras, existem ${}^8C_5$ maneiras distintas de escolher cinco posições, entre as restantes oito, para as cinco bolas de ténis, que são indistinguíveis.

As bolas de futebol podem ser colocadas de 12 maneiras distintas, ocupando as posições 1 a 4, ou 2 a 5, ou 3 a 6, ou 4 a 7, ou 5 a 8, ou 6 a 9, ou 7 a 10, ou 8 a 11, ou 9 a 12, ou 10 a 13, ou 11 a 14, ou 12 a 15. Para cada uma destas maneiras, as bolas de futebol permutam entre si de $4!$ maneiras distintas. Das onze posições restantes, escolhem-se cinco para as cinco bolas de ténis, que são indistinguíveis, o número de maneiras de o fazer é ${}^{11}C_5$. Finalmente, para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}A_3$ formas distintas de escolher, ordenadamente, três posições entre as restantes seis para as três bolas de basquetebol. Logo, o número de casos favoráveis é $12 \times 4! \times {}^{11}C_5 \times {}^{6}A_3$.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis, pelo que a probabilidade pedida é dada por $\dfrac{12 \times 4! \times {}^{11}C_5 \times {}^{6}A_3}{{}^{15}A_7 \times {}^{8}C_5}$.

14.2 3 é o único número inteiro inferior a 4 e superior a 2, pelo que a probabilidade de se retirar uma bola numerada com o número 3 é dada por $P(A \cap B)$. Assim:

- $$\underbrace{P(\bar{A} \cap B)}_{=P(B)-P(A\cap B)} + P(B) = \frac{7}{5} \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) + P(B) = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 2P(B) - \frac{7}{5} = P(A \cap B)$$

- $$P(A|B) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{13}P(B) \underset{P(A\cap B)=2P(B)-\frac{7}{5}}{\Leftrightarrow} 2P(B) - \frac{7}{5} = \frac{5}{13}P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2P(B) - \frac{5}{13}P(B) = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{21}{13}P(B) = \frac{7}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{7 \times 13}{5 \times 21} \Leftrightarrow P(B) = \frac{13}{15}$$

Logo, a probabilidade de se retirar uma bola numerada com o número 3 é:

$$P(A \cap B) = 2P(B) - \frac{7}{5} = 2 \times \frac{13}{15} - \frac{7}{5} = \frac{26}{15} - \frac{7}{5} = \frac{26}{15} - \frac{21}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

15. Sendo n o número de amigos de Viana do Castelo tem-se que o número de casos possíveis é $(n+3)!$, que é o número de maneiras dos $n+3$ permutarem nas $n+3$ posições de descida.

Para o número de casos favoráveis começamos por agrupar os três amigos de Aveiro num bloco. Esse bloco e os n amigos de Viana do Castelo (que contam como $n+1$ «pessoas», dado que o bloco conta como uma pessoa) permutam entre si de $(n+1)!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras os três amigos de Aveiro permutam entre si, no bloco, de $3!$ maneiras distintas.

Logo, o número de casos favoráveis é $(n+1)! \times 3!$, pelo que a probabilidade, em função de n, dos três amigos de Aveiro descerem consecutivamente é dada por $\dfrac{(n+1)! \times 3!}{(n+3)!}$.

Portanto, $\dfrac{(n+1)!\times 3!}{(n+3)!}=\dfrac{1}{51}\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{(n+1)!}\times 6}{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}=\dfrac{1}{51}\Leftrightarrow 6\times 51=n^2+5n+6\Leftrightarrow n^2+5n-300=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 1\times(-300)}}{2\times 1}\Leftrightarrow n=-20\ \vee\ n=15$$

Como $n\in\mathbb{N}$, tem-se que $n=15$, pelo que o grupo é constituído por $15+3=18$ pessoas.

16. Consideremos os acontecimentos:

- A: «O funcionário escolhido é do sexo masculino.»
- B: «O funcionário escolhido é licenciado.»

Pelo enunciado, tem-se que $P(A)=40\%$, ou seja, $P(A)=0,4$.

Como $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados, tem-se que $P(B|A)=\frac{1}{8}$.

Logo, $P(B|A)=\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}\underset{P(A)=0,4}{\Leftrightarrow} P(B\cap A)=\dfrac{1}{8}\times 0,4\Leftrightarrow P(B\cap A)=0,05$.

Como entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são do sexo feminino, tem-se que $P(\overline{A}|B)=\frac{3}{4}$.

Logo, $P(\overline{A}|B)=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow P(\overline{A}\cap B)=\dfrac{3}{4}P(B)$.

Pretende-se determinar $P(A\cup\overline{B})$.

Tem-se que $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-\underbrace{P(A\cap\overline{B})}_{P(A)-P(A\cap B)}=P(A)+1-P(B)-\big(P(A)-P(A\cap B)\big)=$

$$=\cancel{P(A)}+1-P(B)-\cancel{P(A)}+P(A\cap B)=1-P(B)+P(A\cap B)$$

Assim, como já sabemos o valor de $P(A\cap B)$, falta-nos determinar o valor de $P(B)$.

Mas $P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{3}{4}P(B)$, pelo que:

$$\underbrace{P\left(\overline{A}\cap B\right)}_{=P(B)-P(A\cap B)}=\frac{3}{4}P(B)\Leftrightarrow P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{=0,05}=\frac{3}{4}P(B)\Leftrightarrow P(B)-\frac{3}{4}P(B)=0,05\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}P(B)=0,05\Leftrightarrow P(B)=0,05\times4\Leftrightarrow P(B)=0,2$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)=1-P(B)+P(A\cap B)=1-0,2+0,05=0,85\text{, ou seja, }P\left(A\cup\overline{B}\right)=85\%$$

Outra resolução (usando uma tabela):

Com a informação dada pelo enunciado podemos construir a seguinte tabela:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$0,05$	$\frac{3}{4}P(B)$	$P(B)$
$\overline{B}$			
Total	$0,4$		1

Logo, $0,05+\frac{3}{4}P(B)=P(B)\Leftrightarrow 0,05=P(B)-\frac{3}{4}P(B)\Leftrightarrow 0,05=\frac{1}{4}P(B)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B)=0,05\times4\Leftrightarrow P(B)=0,2$$

Preenchendo o resto da tabela:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$0,05$	$\frac{3}{4}\times0,2=0,15$	$0,2$
$\overline{B}$	$0,4-0,05=0,35$	$0,6-0,15=0,45$	$1-0,2=0,8$
Total	$0,4$	$1-0,4=0,6$	1

Portanto, $P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=0,4+0,8-0,35=0,85$, ou seja, $P\left(A\cup\overline{B}\right)=85\%$.

17. $P(Y|X)$ é a probabilidade de todas as bolas numeradas com um número ímpar serem extraídas, sabendo que a bola com o número 4 é extraída exatamente quatro vezes.

Sabemos que a bola com o número 4 saiu em exatamente quatro das extrações. Assim, para cada umas das restantes cinco extrações há oito possibilidades (qualquer um dos restantes oito algarismos), pelo que o número de casos possíveis é 8^5.

Como queremos que sejam extraídas todas as bolas numeradas com um número ímpar, nas restantes cinco extrações onde não saiu o número 4 têm de sair as bolas com os cinco algarismos ímpares, pelo que o número de casos favoráveis é $5!$, que é o número de maneiras de os cinco algarismos ímpares permutarem nas cinco posições correspondentes às cinco extrações onde não saiu o número 4.

Logo, pela regra de Laplace, tem-se que $P(Y|X) = \frac{5!}{8^5} \approx 0{,}0037$.

18. O número de casos possíveis é ${}^8C_4$, que é o número de maneiras de escolher quatro amigos entre os oito. Para o número de casos favoráveis, ao total de possibilidades de escolher quatro amigos, retiram--se todos os grupos de quatro em que os dois membros do casal não estejam presentes. Para isso, escolhem-se dois amigos entre os restantes seis (excluindo o casal), sendo o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_2$. Assim, o número de casos favoráveis é ${}^8C_4 - {}^6C_2$.

A probabilidade pedida é $\frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$.

Resposta: C

19. Tem-se que:

- os acontecimentos A e B são incompatíveis, pelo que $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$;
- os acontecimentos $A \cup B$ e C são equiprováveis, pelo que $P(A \cup B) = P(C)$.

Assim:

$$P\left(\overline{A} \middle| (A \cup B)\right) + P\left(\overline{B} \middle| C\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A} \cap (A \cup B)\right)}{\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(C)}} + \frac{P\left(\overline{B} \cap C\right)}{P(C)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A} \cap (A \cup B)\right)}{P(C)} + \frac{P\left(\overline{B} \cap C\right)}{P(C)} = 1$$

Mas, $\overline{A}\cap(A\cup B)=\underbrace{(\overline{A}\cap A)}_{=\varnothing}\cup(\overline{A}\cap B)=\varnothing\cup(\overline{A}\cap B)=\overline{A}\cap B$, pelo que a equação fica:

$$\frac{P(\overline{A}\cap(A\cup B))}{P(C)}+\frac{\overbrace{P(\overline{B}\cap C)}^{=P(C)-P(B\cap C)}}{P(C)}=1\Leftrightarrow\frac{\overbrace{P(\overline{A}\cap B)}^{=P(B)-P(A\cap B)}+P(C)-P(B\cap C)}{P(C)}=1\Leftrightarrow$$

$$\underset{P(C)\neq 0}{\Leftrightarrow}P(B)-\overbrace{P(A\cap B)}^{=0}+P(C)-P(B\cap C)=P(C)$$

$$\Leftrightarrow\overbrace{P(B)+P(C)-P(B\cap C)}^{=P(B\cup C)}=P(C)\Leftrightarrow P(B\cup C)=P(C)$$

Logo, os acontecimentos $B\cup C$ e C são equiprováveis.

20. Vamos verificar cada uma das opções:

- $\lim\frac{n}{1-n^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{\cancel{n}}{-n^{\cancel{2}}}=\lim\frac{1}{-n}=\frac{1}{-\infty}=0^-$.

Logo, $\lim f\left(\frac{n}{1-n^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$, pelo que o termo geral da sucessão (u_n) não pode ser $1-n^2$.

- $\lim\frac{n}{n^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}=\lim\frac{1}{n}=\frac{1}{+\infty}=0^+$.

Logo, $\lim f\left(\frac{n}{n^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, pelo que o termo geral da sucessão (u_n) não pode ser n^2-1.

- $\lim\frac{n}{\sqrt{n}-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{n}{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim\frac{n}{\sqrt{n}}\times\lim\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\left(\frac{n}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)\times\lim\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}}=$

$$=\lim\frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{+\infty}}=\sqrt{+\infty}\times\frac{1}{1-0}=+\infty\times 1=+\infty$$

Ou $\lim\frac{n}{\sqrt{n}-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\left(\frac{n}{\sqrt{n}-1}\times\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}\right)=\lim\frac{n}{(\sqrt{n})^2-1^2}\times\overbrace{\lim(\sqrt{n}+1)}^{\sqrt{+\infty}+1=+\infty}=\overbrace{\lim\frac{n}{n-1}}^{=\lim\frac{n}{n}=1}\times(+\infty)=1\times(+\infty)=+\infty$

Logo, $\lim f\left(\frac{n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, pelo que o termo geral da sucessão (u_n) não pode ser $\sqrt{n}-1$.

- $$\lim\frac{n}{1-\sqrt{n}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{n}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)}=\lim\underbrace{\frac{n}{\sqrt{n}}}_{=\sqrt{n}}\times\lim\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}-1}=\lim\sqrt{n}\times\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{+\infty}}-1}=$$

$$=\sqrt{+\infty}\times\frac{1}{0-1}=+\infty\times(-1)=-\infty$$

Logo, $\lim f\left(\frac{n}{1-\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, pelo que o termo geral da sucessão (u_n) pode ser $\sqrt{n}-1$.

Resposta: D

21. O declive da reta r é dado por $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-2}{3-0}=\frac{2}{3}$. Como o ponto de coordenadas $(0,2)$ pertence à reta r, a sua ordenada na origem é 2, pelo que a equação reduzida da reta r é $y=\frac{2}{3}x+2$.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{3}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)=2$, pelo que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2f(x)-\frac{3(f(x))^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xf(x)-3(f(x))^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3f(x)\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)}{x}=$$

$$=-3\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{2}{3}x\right)=-\cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}}\times2=-4$$

22.1 A função g é contínua em $x=2$ se $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=g(2)$:

- $$\lim_{x\to2^-} g(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-2)}}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$$

- $$\lim_{x\to2^+} g(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x\sqrt{2x}-4}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{\left(x\sqrt{2x}-4\right)\left(x\sqrt{2x}+4\right)}{(x-2)\left(x\sqrt{2x}+4\right)}=\lim_{x\to2^+}\frac{\overbrace{\left(x\sqrt{2x}\right)^2}^{x^2\times2x=2x^3}-4^2}{(x-2)\left(x\sqrt{2x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^3-16}{(x-2)\left(x\sqrt{2x}+4\right)}\underset{i)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}\left(2x^2+4x+8\right)}{\cancel{(x-2)}\left(x\sqrt{2x}+4\right)}=\frac{2\times2^2+4\times2+8}{2\sqrt{2\times2}+4}=\frac{24}{8}=3$$

i) Fatorizando os polinómios $2x^3-16$ e x^2-x-2:

	2	0	0	-16
2		4	8	16
	2	4	8	$\boxed{0}$

$2x^3-16=(x-2)(2x^2+4x+8)$

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$$

Logo, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

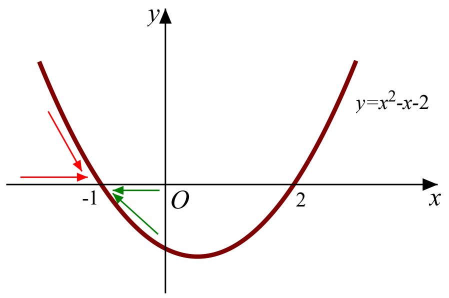
Nota: Também se poderia usar a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio x^2-x-2

Como $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\dfrac{4}{3}\neq3=\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$, a função g não é continua em $x=2$.

22.2 Assíntotas verticais

- $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}=\dfrac{(-1)^2-4}{(-1)^2-(-1)-2}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}=\dfrac{(-1)^2-4}{(-1)^2-(-1)-2}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty$



$\lim\limits_{x\to-1^-}(x^2-x-2)=0^+$ e $\lim\limits_{x\to-1^+}(x^2-x-2)=0^-$

Logo, a reta de equação $x=-1$ é assíntota vertical ao gráfico de g. Como a função g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, e como os limites laterais em $x=2$ são finitos, o gráfico de g não tem mais assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$

Logo, a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g, quando $x\to-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{2x}-4}{x-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{2x}-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{2\times(+\infty)}-\frac{4}{+\infty}}{1-\frac{2}{+\infty}}=\dfrac{\sqrt{+\infty}-0}{1-0}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$

Logo, quando $x\to+\infty$, o gráfico de g não tem assíntota horizontal.

22.3 A função h tem um mínimo absoluto igual a 4 em $x=8$, pelo que $h(8)=4$ e $h(x)\geq 4$ para todo o $x\in\mathbb{R}$.

Pretende-se mostrar que os gráficos das funções g e h se intersetam pelo menos uma vez no intervalo $]4,8[$, ou seja, pretende-se mostrar que a equação $h(x)=g(x)\Leftrightarrow h(x)-g(x)=0$ tem pelo menos uma solução em $]4,8[$.

Seja f, definida em $[4,8]$, por $f(x)=h(x)-g(x)$.

Assim:

- a função f é contínua em $[4,8]$, por ser a diferença entre funções contínuas no seu domínio. h é contínua por hipótese e, para $x\in[4,8]$, tem-se que $g(x)=\dfrac{x\sqrt{2x}-4}{x-2}$, que é contínua por ser o produto, a diferença e o quociente entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e irracionais).

- $f(4)=h(4)-g(4)=h(4)-\dfrac{4\sqrt{2\times4}-4}{4-2}=h(4)-\dfrac{4\sqrt{8}-4}{2}=h(4)-2\sqrt{8}+2$

Tem-se que $h(x)\geq 4$ para todo o x real, pelo que:

$$h(4)\geq 4\Leftrightarrow \underbrace{h(4)-2\sqrt{8}+2}_{f(4)}\geq 4-2\sqrt{8}+2\Leftrightarrow f(4)\geq 6-2\sqrt{8}$$

Mas, $6-2\sqrt{8}>0$ $(6-2\sqrt{8}\approx 0,34)$*, pelo que $f(4)\geq 2\sqrt{8}-6>0$.

* Sem usar a calculadora: $2\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 8}=\sqrt{32}$ e $6=\sqrt{36}$, pelo que $6-2\sqrt{8}=\sqrt{36}-\sqrt{32}>0$.

- $f(8)=h(8)-g(8)=4-\dfrac{8\sqrt{2\times8}-4}{8-2}=4-\dfrac{8\sqrt{16}-4}{6}=4-\dfrac{8\times4-4}{6}=4-\dfrac{14}{3}=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow f(8)<0$

Logo, como $f(4)$ e $f(8)$ têm sinais contrários, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função f tem pelo menos um zero em $]4,8[$, isto é:

$$\exists c\in\,]4,8[\,: f(c)=0\Leftrightarrow \exists c\in\,]4,8[\,: h(c)-g(c)=0\Leftrightarrow \exists c\in\,]4,8[\,: h(c)=g(c)$$

Portanto, a equação $h(x)=g(x)$ tem pelo menos uma solução em $]4,8[$, pelo que os gráficos de g e de h intersetam-se pelo menos uma vez em $]4,8[$.

FIM