Avaliação – Itens para testes de avaliação

Matemática A | 12.º Ano

Tópicos: Combinatória e probabilidades. Continuidade, assíntotas e teorema de Bolzano-Cauchy.

Combinatória e probabilidades

1. Sejam A e B dois conjuntos de um universo U tais que $A \subset B$.

Qual dos seguintes conjuntos é igual a $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \overline{A}$?

A A

B B

C $\overline{A}$

D $\overline{B}$

2. Considera todos os números naturais de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 0 a 9.

2.1 Quantos destes números são ímpares, têm exatamente dois zeros e não têm mais algarismos repetidos?

A 840

B 960

C 1680

D 1920

2.2 Quantos destes números têm os algarismos dispostos por ordem crescente ou por ordem decrescente?

3. Uma coleção de peças de porcelana tem dez pratos distintos, seis jarras distintas e dois vasos iguais.

3.1 O dono desta coleção pretender dispor todas as peças, lado a lado, numa prateleira.

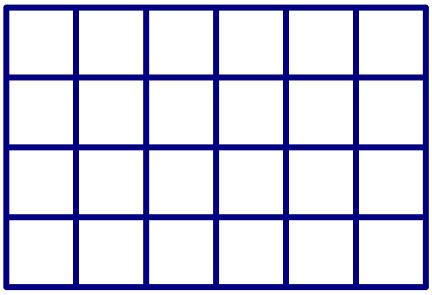
Quantas filas distintas se podem formar, de modo que os dois vasos fiquem em posições consecutivas?

Não é necessário apresentar o valor numérico.

3.2 Pretende-se escolher seis peças para uma exposição, de modo que não haja peças iguais.

Quantos conjuntos de seis peças distintas podem ser formados?

3.3 Para uma outra exposição, as dezoito peças vão ser dispostas num expositor com 24 compartimentos individuais, como representado na figura.



Quantas disposições distintas se podem formar, de modo que numa das filas horizontais apenas fiquem os dois vasos?

Uma expressão que permite determinar o número de disposições possíveis é $4 \times {}^{6}C_{2} \times {}^{18}A_{16}$.

Numa pequena composição, explica esta expressão no contexto do problema.

4. De um baralho completo de cartas, foram retiradas algumas e colocadas em cima de uma mesa.

Sabe-se que:

- em cima da mesa estão cartas vermelhas e pretas;
- existem 45 maneiras distintas de escolher duas das cartas vermelhas;
- colocando numa só fila todas as cartas, existem 174 182 400 maneiras distintas de as cartas da mesma cor ficarem dispostas consecutivamente.

Quantas cartas foram colocadas em cima da mesa?

Sugestão: Designa por n o número de cartas vermelhas e por p o número de cartas pretas.

5. Onze amigos, entre os quais o Pedro, a Inês, a Sofia, a Maria e o João, pretendem colocar-se numa só fila para tirar uma foto.

Sabe-se que a Inês, a Sofia e a Maria pretendem ficar em posições consecutivas, e que o Pedro e o João não pretendem ficar em posições consecutivas.

Nas condições do enunciado, quantas filas distintas se podem formar?

A 1 693 440

B 846 720

C 141 120

D 40 320

6. Considera uma certa linha n do triângulo de Pascal.

Sabe-se que ${}^{n}C_6 + {}^{n}C_7 + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_{20}$.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, determina a soma de todos os elementos da linha $n+1$.

7. Numa certa linha, n, do triângulo de Pascal, os três elementos centrais são a, b e c, tal que $a<b$ e $b>c$.

Qual é o elemento central da linha $n+2$?

A $a+b$ **B** $2a+2b$ **C** $a+2b$ **D** $2a+b$

8. Considera o desenvolvimento do binómio $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{x^2}\right)^{19}$, com $x>0$ e $a \in \mathbb{R}$.

O coeficiente do termo de segundo grau é 7752.

Qual é o valor de a?

A -3 **B** -2 **C** 2 **D** 3

9. Considera o desenvolvimento do binómio $\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^n$, com $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que n satisfaz a equação ${}^{n}C_3 - {}^{n}C_7 = 0$.

Qual é o coeficiente do termo deste desenvolvimento cuja parte literal é x^{11}?

A -960 **B** -360 **C** 360 **D** 960

10. Na fruteira que está na cozinha do João, há dez maçãs, seis laranjas e quatro bananas.

O João propôs à sua a irmã, a Catarina, ambos do 12.º ano, o seguinte problema:

«Considerando que as frutas do mesmo tipo são indistinguíveis, e todos os conjuntos com pelo menos uma peça de fruta que se podem formar com as que temos na fruteira, escolhendo ao acaso um desses conjuntos, qual é a probabilidade de conter exatamente cinco maçãs e pelo menos duas bananas?»

A Catarina conseguiu resolver o problema.

Qual foi a resposta que deu, sabendo que apresentou o resultado na forma de fração irredutível?

11. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam e A e B dois acontecimentos possíveis e independentes ($A \subset E$ e $B \subset E$) tais que:

- $P(B) = 0{,}2$
- $P(A|B) = 0{,}7$

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup B)$?

A $0{,}26$ **B** $0{,}36$ **C** $0{,}44$ **D** $0{,}84$

12. Num grupo de doze pessoas, nove são mulheres e os restantes são homens.

12.1 Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, quatro das doze pessoas, qual é a probabilidade de haver homens, mas no máximo dois, no grupo de quatro pessoas escolhidas?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

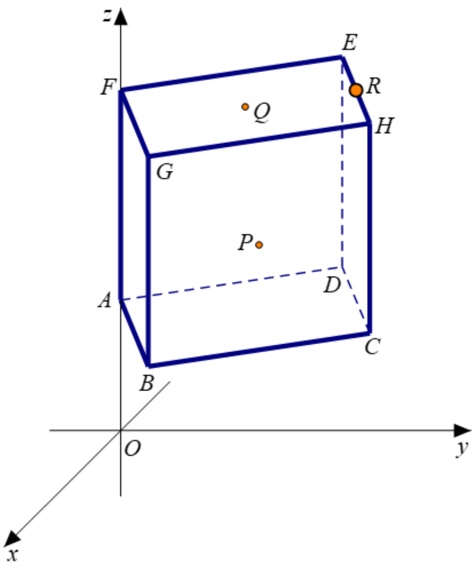
12.2 Pretende-se formar uma comissão com sete pessoas, sendo que essa comissão tem três cargos: presidente, vice-presidente e tesoureiro. As restantes pessoas desempenharão tarefas indiferenciadas.

Quantas comissões distintas podem ser formadas de modo que haja pelo menos uma mulher e pelo menos um homem a desempenhar os cargos?

13. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- a aresta $[AF]$ está contida no eixo Oz;
- P é o centro da face $[BCHG]$;
- Q é o centro da face $[EFGH]$;
- R é o ponto médio da aresta $[EH]$.



Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três dos onze pontos assinalados.

Qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao plano xOy?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

14. O João faz coleção de bolas de vários desportos.

14.1 Supõe que o João pretende colocar algumas das bolas que tem num expositor com quinze lugares, de modo que cada lugar fique ocupado por apenas uma bola.

Nesse expositor vão ser colocadas doze bolas:

- quatro bolas de futebol distintas;
- três bolas de basquetebol distintas;
- cinco bolas de ténis iguais.

Dispondo as bolas ao acaso, qual é a probabilidade de as bolas de futebol ficarem dispostas consecutivamente?

Uma expressão que dá esta probabilidade é $\dfrac{12 \times 4! \times {}^{11}C_5 \times {}^{6}A_3}{{}^{15}A_7 \times {}^{8}C_5}$.

Numa pequena composição, explica esta expressão, no contexto do problema.

Na tua resposta:

- enuncia a regra de Laplace;
- apresenta uma explicação para o número de casos possíveis;
- apresenta uma explicação para o número de casos favoráveis.

14.2 Num saco, o João tem várias bolas de *snooker*, todas numeradas.

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

- A: «A bola retirada está numerada com um número inferior a 4.»
- B: «A bola retirada está numerada com um número superior a 2.»

Sabe-se que $P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(B) = \dfrac{7}{5}$ e que $P\left(A \middle| B\right) = \dfrac{5}{13}$.

Qual é a probabilidade de a bola retirada estar numerada com o número 3?

15. Um grupo de amigos constituído por três de Aveiro e alguns de Viana do Castelo vai a um parque aquático. Numa dada altura do dia decidem ir todos à maior atração do parque, um escorrega com vinte metros de altura em que só pode descer uma pessoa de cada vez.

Sabe-se que se a ordem de descida dos amigos for aleatória, a probabilidade de os três de Aveiro descerem consecutivamente é $\frac{1}{51}$.

O grupo é constituído por quantas pessoas?

16. Numa empresa, sabe-se que:

- 40% dos funcionários são do sexo masculino;
- $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados;
- entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são do sexo feminino.

Escolhe-se ao acaso um funcionário desta empresa.

Qual é a probabilidade de não ser licenciado ou ser do sexo masculino?

Apresenta o resultado na forma de percentagem.

17. Num saco estão nove bolas indistinguíveis ao tato e numeradas de 1 a 9.

Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente e com reposição, nove bolas do saco.

Sejam X e Y os acontecimentos:

X : «A bola com o número 4 foi extraída exatamente quatro vezes.»

Y : «Todas as bolas numeradas com números ímpares são extraídas.»

Sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, determina o valor de $P(Y|X)$.

Começa por interpretar o significado de $P(Y|X)$ no contexto da situação descrita.

Apresenta o resultado na forma de dízima com quatro casas decimais.

18. Oito amigos, entre os quais o casal Sofia e Carlos, decidiram ir a um concerto. Quando chegaram já só havia quatro bilhetes. Decidiram, então, sortear os quatro bilhetes pelos oito amigos.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, um dos elementos do casal ir ao concerto?

A $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_2}{{}^8C_4}$

C $\frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$

B $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_2 \times 2}{{}^8C_4}$

D $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_4}{{}^8C_4}$

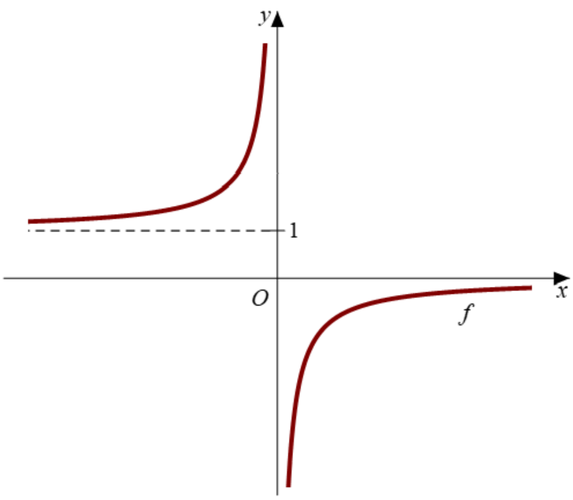
19. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A, B e C três acontecimentos possíveis ($A \subset E$, $B \subset E$ e $C \subset E$), tais que:

- os acontecimentos A e B são incompatíveis;
- os acontecimentos $A \cup B$ e C são equiprováveis;
- $P\left(\overline{A} \middle| (A \cup B)\right) + P\left(\overline{B} \middle| C\right) = 1$.

Mostra que os acontecimentos $B \cup C$ e C são equiprováveis.

Continuidade, assíntotas e teorema de Bolzano-Cauchy

20. Na figura, está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Tal como a figura sugere, as retas de equações $x = 0$ e $y = 0$ são assíntotas ao gráfico de f.

Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim f\left(\frac{n}{u_n}\right) = 1$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral de (u_n)?

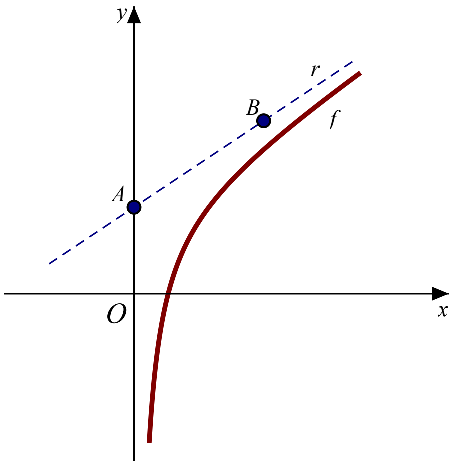
A $1 - n^2$

B $n^2 - 1$

C $\sqrt{n} - 1$

D $1 - \sqrt{n}$

21. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, e a reta r, assíntota ao gráfico de f.



Os pontos A e B pertencem à reta r e as suas coordenadas são, respetivamente, $(0,2)$ e $(3,4)$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)-\dfrac{3(f(x))^2}{x}\right)$?

22. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} & \text{se} \quad x<2\\ \dfrac{4}{3} & \text{se} \quad x=2\\ \dfrac{x\sqrt{2x}-4}{x-2} & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

22.1 A função g é contínua em $x=2$? Justifica.

22.2 Mostra que o gráfico de g tem exatamente duas assíntotas paralelas aos eixos coordenados, uma horizontal e uma vertical.

22.3 Considera uma função h, contínua em $\mathbb{R}$, tal que em $x=8$ tem um mínimo absoluto igual a 4.

Mostra que os gráficos das funções g e h se intersetam pelo menos uma vez no intervalo $]4,8[$.

FIM