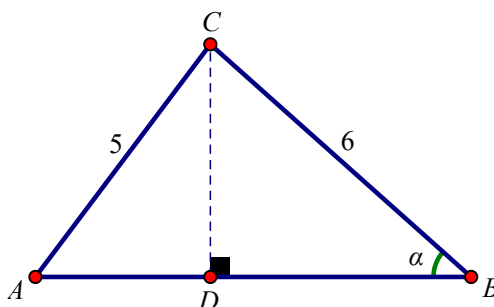


Propostas de resolução

1. Consideremos a seguinte figura, onde D é a projeção ortogonal do ponto C no lado $[AB]$.



$$\text{Tem-se que } \cos \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\overline{BD}}{6} \Leftrightarrow \overline{BD} = 6 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{5}.$$

Assim, pelo teorema de Pitágoras:

- $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 6^2 = (2\sqrt{5})^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 36 = 4 \times 5 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 16$
- $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 5^2 = \overline{AD}^2 + 16 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 9 \Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{9} \Leftrightarrow \overline{AD} = 3$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD} = 3 + 2\sqrt{5}.$$

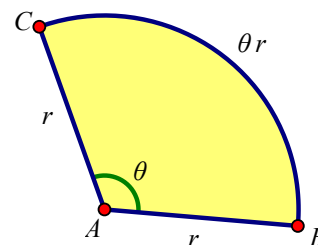
Resposta: C

2. Na figura, está representado um setor circular BAC de raio r e amplitude θ .

O comprimento do arco BC é dado por θr , pelo que o perímetro do setor circular BAC é dado por $2r + \theta r$.

Assim, $2r + \theta r = 4r \Leftrightarrow \theta r = 2r \Leftrightarrow \theta = 2 \text{ rad}$, pelo que:

$$\sin \theta = \sin(2) \approx 0,909 \text{ e } \cos \theta = \cos(2) \approx -0,416$$



Resposta: D

3. Tem-se que $\frac{1345^\circ}{360^\circ} \approx 3,7$. Como $1345^\circ - 3 \times 360^\circ = 265^\circ$, pelo que, $1345^\circ = 265^\circ + 3 \times 360^\circ$, a amplitude do ângulo orientado que tem os mesmos lados origem e extremidade do ângulo generalizado de amplitude 1345° é 265° .

Resposta: D

4. Tem-se $\beta = -\frac{125\pi}{6} = -\frac{120\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 20\pi = \frac{7\pi}{6} - \underbrace{\frac{7\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}}_{-2\pi} - 20\pi = \frac{7\pi}{6} - 22\pi = \frac{7\pi}{6} - 11 \times 2\pi$.

Portanto, $\beta = \frac{7\pi}{6} - 11 \times 2\pi$, pelo que a amplitude do ângulo α pode ser $\frac{7\pi}{6}$.

Resposta: A

5. Como $[BC]$ é o lado de um pentágono regular inscrito na circunferência, $C\hat{O}B = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Como $[AB]$ é o lado de um octógono regular inscrito na circunferência, $B\hat{O}A = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Logo, $\alpha = C\hat{O}B + B\hat{O}A = 72^\circ + 45^\circ = 117^\circ$, pelo que a amplitude de β é $117^\circ - 2560^\circ = -2443^\circ$.

Como $\frac{2443^\circ}{360^\circ} \approx 6,8$ e $2443^\circ - 6 \times 360^\circ = 283^\circ$, -283° é a amplitude do ângulo orientado com os mesmos lados origem e extremidade do ângulo generalizado β , e $-2443^\circ = -283^\circ - 6 \times 360^\circ$.

6. A área do jardim é dada por $\frac{\overline{CD} \times \overline{AB}}{2} = \frac{45 \times \overline{AB}}{2} = 22,5 \times \overline{AB}$.

Como o ângulo ACD tem mais 30° de amplitude do que o ângulo ACB , tem-se $A\hat{C}D = A\hat{C}B + 30^\circ$.

Assim, como $A\hat{C}B + A\hat{C}D = 180^\circ$, vem que:

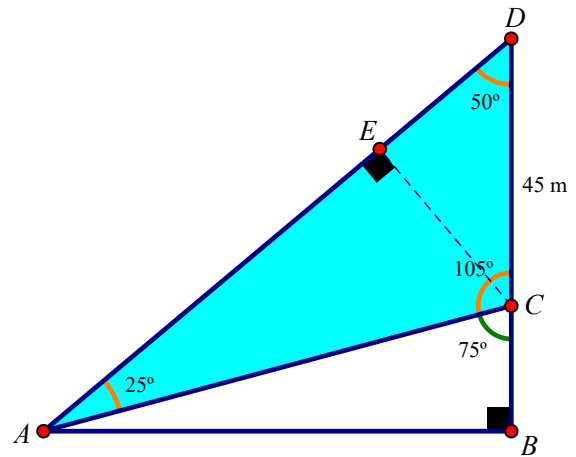
$$A\hat{C}B + A\hat{C}B + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{C}B = 180^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow 2A\hat{C}B = 150^\circ \Leftrightarrow A\hat{C}B = 75^\circ$$

Portanto, $A\hat{C}D = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ$ e $A\hat{D}C + 115^\circ + 25^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{D}C = 180^\circ - 140^\circ \Leftrightarrow A\hat{D}C = 40^\circ$.

Consideremos a figura seguinte, em que E é a projeção ortogonal do ponto C no lado $[AD]$.

Tem-se que:

- $\text{sen}(50^\circ) = \frac{\overline{CE}}{45} \Leftrightarrow \overline{CE} = 45 \text{sen}(40^\circ);$
- $\text{sen}(25^\circ) = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{45 \text{sen}(40^\circ)}{\text{sen}(25^\circ)};$
- $\text{sen}(75^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{45 \text{sen}(40^\circ) \times \text{sen}(75^\circ)}{\text{sen}(25^\circ)}.$



Portanto, a área do jardim é igual a $22,5 \times \overline{AB} = 22,5 \times \frac{45 \text{sen}(40^\circ) \times \text{sen}(75^\circ)}{\text{sen}(25^\circ)} \approx 1488 \text{ m}^2.$

7. Tem-se que:

$$(\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha + 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha}_{=1} + 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

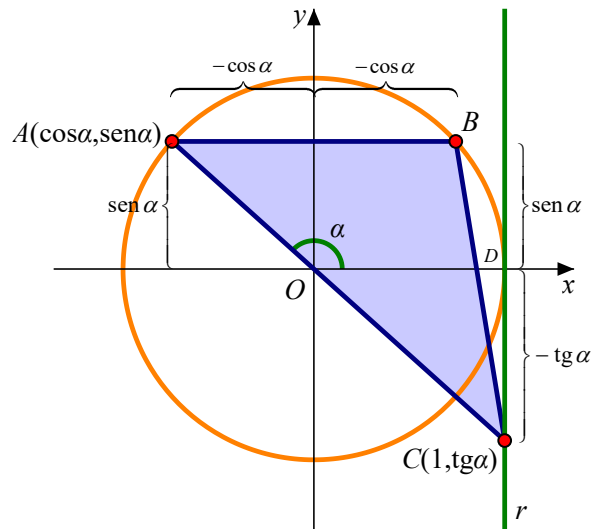
$$\Leftrightarrow 1 + 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = \frac{1}{3} - 1 \Leftrightarrow 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } \text{tg } \alpha + \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} + \frac{1}{\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} + \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overbrace{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha}^{=1}}{\underbrace{\text{sen } \alpha \text{cos } \alpha}_{=-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

Resposta: A

8.1 As coordenadas dos pontos A e C , em função de α , são, respetivamente $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $(1, \operatorname{tg} \alpha)$, em que $\cos \alpha < 0$, $\sin \alpha > 0$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$.



Tem-se que $\overline{AB} = -2 \cos \alpha$ e a medida da altura do triângulo é dada por $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha$, pelo que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{-\cancel{2} \cos \alpha \times (\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha)}{\cancel{2}} &= -\cos \alpha \times \sin \alpha + \cos \alpha \times \operatorname{tg} \alpha = -\cos \alpha \times \sin \alpha + \cancel{\cos \alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cancel{\cos \alpha}} = \\ &= -\cos \alpha \times \sin \alpha + \sin \alpha = \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

8.2 Tem-se que $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \alpha \Leftrightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} - 2 \sin \alpha \times \cos \alpha = 1 + \sin \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - 2 \sin \alpha \times \cos \alpha = \cancel{1} + \sin \alpha \Leftrightarrow -2 \cancel{\sin \alpha} \times \cos \alpha = \cancel{\sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow -2 \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\\ \Rightarrow \sin \alpha \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\\ \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{matrix}$$

Portanto, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, pelo que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

9. Tem-se que $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$ e $\cos(\alpha - 3\pi) = \cos(\alpha - \pi - 2\pi) = \cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$, pelo que:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(\alpha - 3\pi) < 0 \Leftrightarrow -\cos\alpha - 2\cos\alpha < 0 \Leftrightarrow -3\cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0$$

Assim, como $\cos\alpha > 0$, o ângulo de amplitude α pertence ao primeiro quadrante ou ao quarto quadrante. Mas como $\alpha \in]-\pi, 0[$, conclui-se que o ângulo de amplitude α pertence ao quarto quadrante e, portanto, $\sin\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Logo:

- $\sin\alpha < 0 \wedge \cos\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha \times \cos\alpha < 0$ (o produto entre um número positivo e um número negativo é negativo)
- $\operatorname{tg}\alpha < 0 \wedge \sin\alpha < 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha < 0$ (a soma entre dois números negativos é negativa)
- $\operatorname{tg}\alpha < 0 \wedge \cos\alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \times \cos\alpha < 0$

Portanto, nenhuma das opções **A**, **B** e **D** é a correta, pelo que a resposta correta deverá ser a **C**.

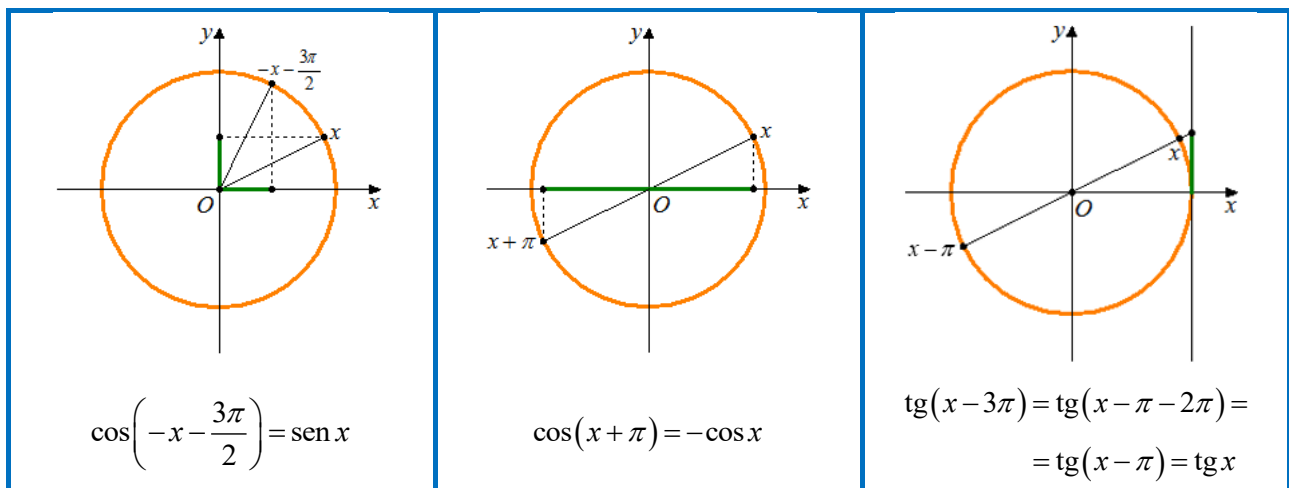
Verificando: como $\cos\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha + (-\sin\alpha)$ e como $\sin\alpha < 0 \Leftrightarrow -\sin\alpha > 0$, tem-se que:

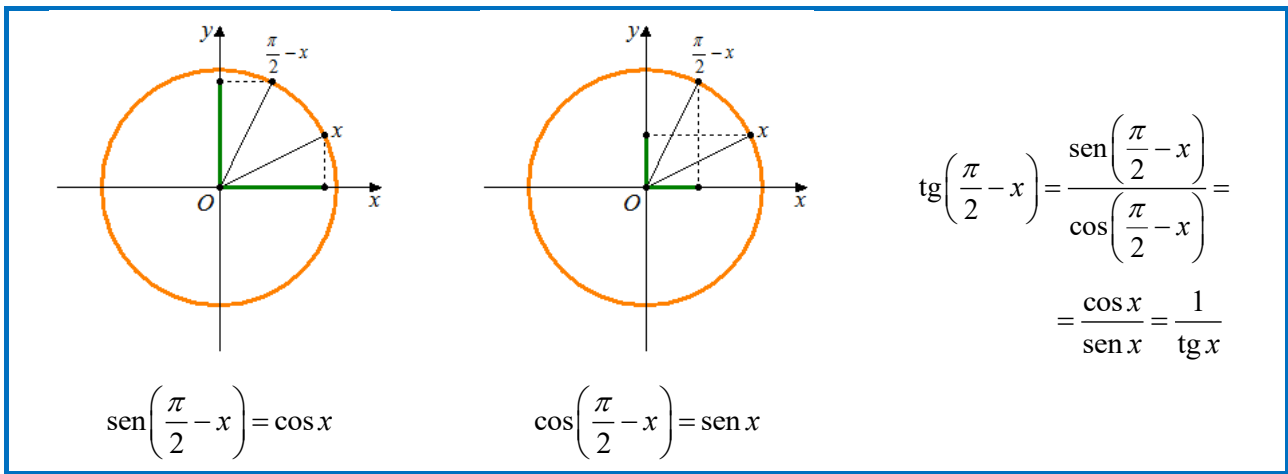
$$\cos\alpha > 0 \wedge -\sin\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha + (-\sin\alpha) > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha - \sin\alpha > 0$$

(a soma entre dois números positivos é positiva)

Resposta: C

10.1





Portanto, $A(x) = \frac{\cos\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \cos(x + \pi) - \text{tg}(x - 3\pi) = \frac{\text{sen } x}{\frac{1}{\text{tg } x}} + \cos x - \text{tg } x =$

$$= \text{sen } x \times \text{tg } x + \cos x - \text{tg } x = \text{sen } x \times \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \cos x - \frac{\text{sen } x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x - \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\overbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}^{=1} - \text{sen } x}{\cos x} = \frac{1 - \text{sen } x}{\cos x}$$

10.2 Tem-se que:

$$\bullet A\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1 - \text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)} \stackrel{\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}}{=} \frac{1 - \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)} \stackrel{i)}{=} \frac{1 - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$$

$$\bullet A\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1 - \text{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} \stackrel{i)}{=} \frac{1 - \text{sen}\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)}{\cos\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)} = \frac{1 - \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\cancel{2} - \sqrt{3}}{\cancel{2}} = -2 + \sqrt{3}$$

Portanto, $A\left(\frac{11\pi}{6}\right) - A\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - (-2 + \sqrt{3}) = \cancel{\sqrt{3}} + 2 - \cancel{\sqrt{3}} = 2.$

i) $\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen } \alpha$ e $\text{cos}(\alpha + 2k\pi) = \text{cos } \alpha$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

10.3 Tem-se $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$. Assim, $\operatorname{tg} \alpha < 0$ e como $\alpha \in]0, \pi[$, conclui-se que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Como $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, vem que:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + (-\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 9 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\Rightarrow \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

Como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha$, tem-se $\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{8} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Logo, } A(\alpha) = \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3 - 2\sqrt{2}}{\frac{1}{3}} = -(3 - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3.$$

11. Consideremos a seguinte figura, em que F é o ponto de interseção do lado $[AD]$ com o eixo Ox .

A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{EF}$.

Mas como $\overline{AD} = 2\overline{AF}$, $\overline{BC} = 2\overline{BE}$ e $\overline{EF} = 1 - \overline{OF}$, tem-se que:

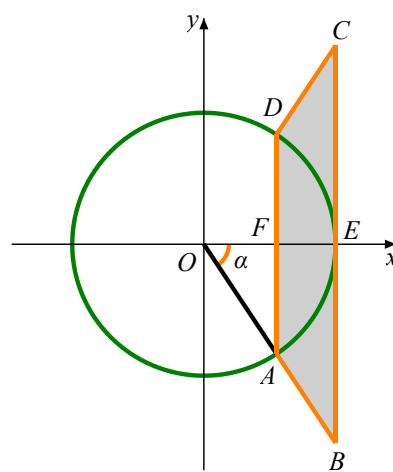
$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{EF} = \frac{2\overline{AF} + 2\overline{BE}}{2} \times (1 - \overline{OF}) = (\overline{AF} + \overline{BE})(1 - \overline{OF})$$

As coordenadas do ponto A são $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, com $\cos \alpha > 0$ e $\operatorname{sen} \alpha < 0$, e as do ponto B são $(1, \operatorname{tg} \alpha)$, com $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Assim, $\overline{AF} = -\operatorname{sen} \alpha$, $\overline{BE} = -\operatorname{tg} \alpha$ e $\overline{OF} = \cos \alpha$ e, portanto:

$$A_{[ABCD]} = (\overline{AF} + \overline{BE})(1 - \overline{OF}) = (-\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)(1 - \cos \alpha) = \left(-\operatorname{sen} \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\right)(1 - \cos \alpha) =$$

$$= -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha = -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \operatorname{sen} \alpha$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \left(\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha} \right) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \underbrace{(\cos^2 \alpha - 1)}_{=-\operatorname{sen}^2 \alpha} = -\operatorname{sen}^2 \alpha \times \operatorname{tg} \alpha$$



12. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)^2 &= \left(\frac{\overbrace{\cos^2 x - 1}^{= \text{sen}^2 x}}{\cos x} \right)^2 = \left(-\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \right)^2 = \left(-\frac{\text{sen } x}{\cos x} \times \text{sen } x \right)^2 = (-\text{tg } x \times \text{sen } x)^2 = \\ &= (-\text{tg } x)^2 \times (\text{sen } x)^2 = \text{tg}^2 x \times \text{sen}^2 x \end{aligned}$$

13. Uma expressão geral dos maximizantes da função seno, isto é, a expressão geral dos objetos para os quais a função seno é igual a 1, é $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ também é uma expressão geral dos maximizantes da função seno.

Resposta: C

14. A função seno é decrescente e positiva no segundo quadrante. Nesse quadrante, a função cosseno é decrescente e negativa.

Resposta: D

15. Tem-se que:

(A) se $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, então $g(\beta) = g\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \neq \frac{1}{3}$;

(B) se $\beta = \pi + \alpha$, então $g(\beta) = g(\pi + \alpha) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$;

(C) se $\beta = 2\pi - \alpha$, então $g(\beta) = g(2\pi - \alpha) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{3}$;

(D) se $\beta = 2\pi + \alpha$, então $g(\beta) = g(2\pi + \alpha) = \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Resposta: B

16.1 Para todo o $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, pelo que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Leftrightarrow 3 - 2 \leq 3 + 2 \cos x \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq 3 + 2 \cos x \leq 5$$

Como a função f toma todos os valores entre 1 e 5, incluindo estes, o contradomínio de f é $[1, 5]$, pelo que f não tem zeros.

16.2 Tem-se que $f(x) = 2 \Leftrightarrow 3 + 2\cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$.

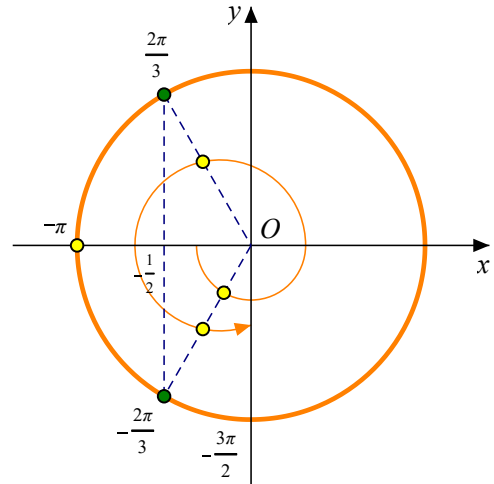
Tem-se que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Tendo em conta a circunferência

trigonométrica ao lado, no intervalo $\left]-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos x = -\frac{1}{2}$

em $-\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$, em $\frac{2\pi}{3}$ e em $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Portanto, os objetos cuja imagem por meio da função f são

iguais a 2 são $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.



17.1 $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Uma expressão geral dos zeros da função seno é $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como o gráfico de g se obtém a partir do gráfico da função seno através de uma translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, uma expressão geral

dos zeros de g é $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

17.2 Para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, pelo que $-\sqrt{2} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

Como g toma todos os valores entre $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, incluindo estes, vem que o contradomínio de g é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e o mínimo de g é $-\sqrt{2}$. Assim, $g(x) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Uma expressão geral dos objetos cuja imagem por meio da função seno é -1 é $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (são os minimizantes da função seno). Como o gráfico de g se obtém a partir do gráfico da função seno através de uma translação de vetor de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, uma expressão geral dos minimizantes de g é

$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

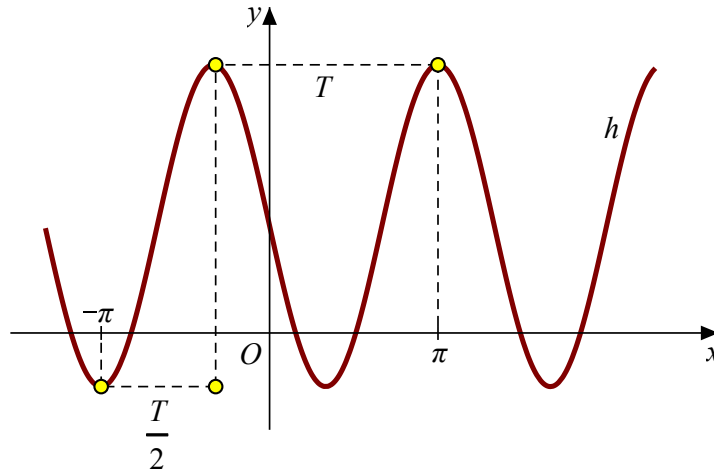
Logo, o menor minimizante positivo de g obtém-se para $k=1$, pelo que o menor minimizante positivo

de g é $\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Portanto, $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{20\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

18. Sendo T o período positivo mínimo da função h , a frequência é dada por $f = \frac{1}{T}$.

Considera a seguinte figura:



Tem-se que $T + \frac{T}{2} = \pi - (-\pi) \Leftrightarrow \frac{3T}{2} = \pi + \pi \Leftrightarrow \frac{3T}{2} = 2\pi \Leftrightarrow 3T = 4\pi \Leftrightarrow T = \frac{4\pi}{3}$, pelo que $f = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{4\pi}$.

Resposta: D

19.

- A afirmação é I. é falsa. Por exemplo, $0 < \frac{3\pi}{4}$ e $\text{tg}(0) = 0 > -1 = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
- A afirmação é II. é verdadeira. O período positivo mínimo da função tangente é π , pelo que $\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg}x$, para todo o x e pertencente ao domínio da função tangente e $k \in \mathbb{Z}$. Logo, para $k = 2$, tem-se $\text{tg}(x + 2\pi) = \text{tg}x$, donde se conclui que 2π é período da função tangente.

Resposta: C

20.1 Para todo o $x \in [-\pi, \pi]$, tem-se $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1$. Assim, para $k > 0$:

$$-k \leq k \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \leq k \Leftrightarrow \underbrace{k-2-k}_{-2} \leq \underbrace{k-2+k \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{k+k-2}_{2k-2} \Leftrightarrow -2 \leq g(x) \leq 2k-2$$

(Em cada uma das passagens, a função toma todos os valores reais entre os extremos do intervalo.)

Portanto, em função de k , o contradomínio da função g é $[-2, 2k-2]$.

Por outro lado, o contradomínio da função g é $[-2, 4]$, pelo que $2k-2 = 4 \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$.

20.2 Tem-se que:

$$\bullet \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cos}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\operatorname{cos}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{\sqrt{2}};$$

Assim, como $\alpha \in]-\pi, 0[$ e $\operatorname{tg}\alpha < 0$, conclui-se que o ângulo de amplitude α pertence ao quarto quadrante, pelo que $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\operatorname{cos}\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \bullet g(2\alpha + \pi) + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}_{-\operatorname{sen}\alpha} &= 1 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha + \pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\alpha = 1 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\alpha = \\ &= 1 + 3\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\alpha = 1 + 3\operatorname{cos}\alpha - \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

Portanto:

$$\bullet \text{ como } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}, \text{ tem-se que:}$$

$$1 + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{16}{2} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{9} \underset{\operatorname{cos}\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \operatorname{cos}\alpha = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{cos}\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \text{ como } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{cos}\alpha, \text{ tem-se que:}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Logo, } g(2\alpha + \pi) + \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = 1 + 3\operatorname{cos}\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 1 + 3 \times \frac{1}{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

21.1 O período mínimo positivo da função x é $\frac{2\pi}{|3\pi|} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$.

Se num dado instante t a abscissa de P é x_0 , passados $\frac{2}{3}$ de um minuto, isto é, 40 segundos, a abscissa de P volta a ser x_0 .

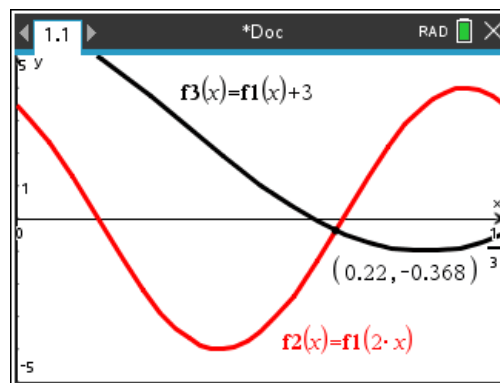
21.2 Tem-se que, para todo o $t \geq 0$, $-1 \leq \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, pelo que $-4 \leq 4\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 4$.

Como a função x toma todos os valores entre -4 e 4 , incluindo estes, toma também o valor 0 , isto é, a abscissa de P é 0 para algum instante t , pelo que a distância mínima de P à origem é 0 .

21.3 Os primeiros vinte segundos do movimento correspondem ao intervalo de tempo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

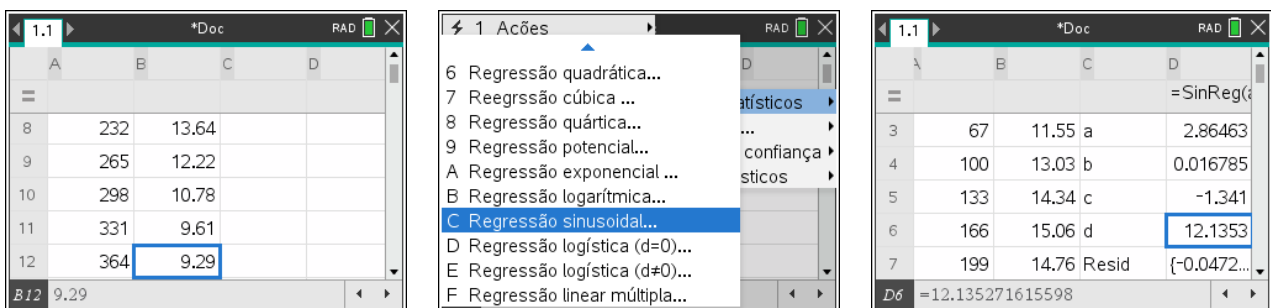
No instante t_0 a abscissa do ponto P é dada por $x(t_0)$. Passado o mesmo tempo que decorreu até ao instante t_0 , isto é, $t_0 + t_0 = 2t_0$, a abscissa do ponto P é dada por $x(2t_0)$ e, nesse instante, a abscissa de P aumentou 3 unidades em relação à abscissa de P no instante t_0 , ou seja, $x(2t_0) = x(t_0) + 3$.

Portanto, pretende-se determinar $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ tal que $x(2t) = x(t) + 3$.



Logo, $t_0 \approx 0,22$ (na imagem, f_1 corresponde à função x).

22. Começamos por introduzir os dados da tabela numa calculadora, para depois efetuar a regressão sinusoidal.



Assim, obtemos: $a \approx 2,865$, $b \approx 0,017$, $c \approx -1,341$ e $d \approx 12,135$.

Como o dia 11 de junho de 2025 (ano comum) corresponde ao dia de ordem $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 11 = 162$, o comprimento do dia nesse dia foi de

$$C(162) \approx 2,865\text{sen}(0,017 \times 162 - 1,341) + 12,135 \approx 15 \text{ horas.}$$

23.1 Tem-se que $10y + 5x = 6 \Leftrightarrow 10y = -5x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{10}x + \frac{6}{10} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$.

Logo, sendo α a inclinação da reta r , tem-se que $\operatorname{tg} \alpha = m_r = -\frac{1}{2}$, pelo que $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ \approx 153^\circ$

23.2 Como as retas r e s são perpendiculares, então $m_s = -\frac{1}{m_r}$, sendo m_s o declive da reta s e m_r o declive da reta r . Assim, como o declive da reta r é $-\frac{1}{2}$, o declive da reta s é $-\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$.

Logo, a equação reduzida da reta s é da forma $y = 2x + b$. O ponto de coordenadas $(1, 4)$ pertence à reta s , pelo que, substituindo na sua equação vem: $4 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2$. Portanto, a equação reduzida da reta s é $s: y = 2x + 2$.

Resposta: A

24. Tem-se que $\sqrt{3}x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + 2$, pelo que um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1, \sqrt{3})$.

$(x, y) = (0, 2) + k(3, \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta s , pelo que um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(3, \sqrt{3})$.

Tem-se que:

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = 1 \times 3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 + 3 = 6$;
- $\|\vec{r}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ e $\|\vec{s}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Logo, $\cos(\hat{r}, \hat{s}) = \left| \cos(\vec{r}, \vec{s}) \right| = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \times \|\vec{s}\|} = \frac{6}{2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, como $\cos(\hat{r}, \hat{s}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, conclui-se que $\hat{r}, \hat{s} = 30^\circ$.

25. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\hat{u}, \hat{v}) = 2 \times 2 \times \cos(\hat{u}, \hat{v}) = 4 \cos(\hat{u}, \hat{v})$.

Como os vetores \vec{u} e \vec{v} não são colineares, $-1 < \cos(\hat{u}, \hat{v}) < 1 \Leftrightarrow -4 < \cos(\hat{u}, \hat{v}) < 4 \Leftrightarrow -4 < \vec{u} \cdot \vec{v} < 4$, conclui-se que, dos valores apresentados, o único que não pode ser igual a $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é 4.

Resposta: D

26. Os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, pelo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Assim:

$$4\vec{v} \cdot (2\vec{u} - \sqrt{3}\vec{w}) = 6 \Leftrightarrow 8\vec{v} \cdot \vec{u} - 4\sqrt{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \Leftrightarrow 8 \times 0 - 4\sqrt{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \Leftrightarrow -4\sqrt{3}\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \Leftrightarrow$$

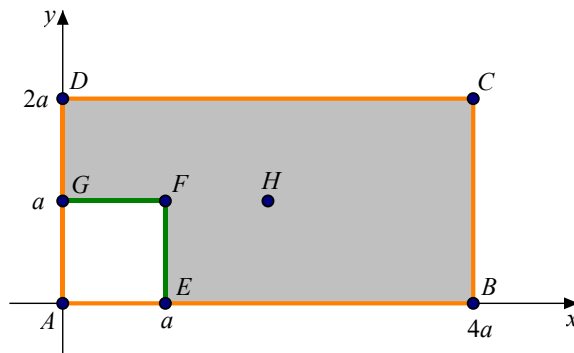
$$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{6}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{6\sqrt{3}}{4 \times 3} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{6\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo α a amplitude do ângulo formado pelos vetores \vec{v} e \vec{w} , tem-se:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 1 \times 1 \times \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha \in [0, \pi] \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

27.1 Vamos representar o retângulo num referencial à nossa escolha, um que seja conveniente, por exemplo, um em que A é origem do referencial, ou seja, $A(0,0)$, D e G pertencem ao eixo Oy , e E e B pertencem ao eixo Ox .

Assim, se $\overline{AE} = \overline{AG} = a$, com $a > 0$, e dado que G é o ponto médio de $[AD]$, H é o centro do retângulo $[ABCD]$ e $\overline{AB} = 2\overline{AD}$, então $B(4a,0)$, $C(4a,2a)$, $D(0,2a)$, $E(a,0)$, $F(a,a)$, $G(0,a)$ e $H(2a,a)$.



Portanto, $A_{[EBCDGF]} = A_{[ABCD]} - A_{[AEFG]} = \overline{AB} \times \overline{AD} - \overline{AE}^2 = 4a \times 2a - a^2 = 8a^2 - a^2 = 7a^2$

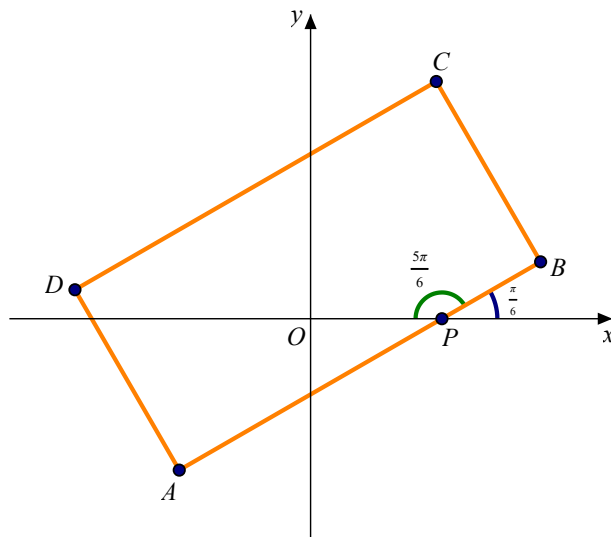
Por outro lado:

- $\overline{GC} = C - G = (4a - 0, 2a - a) = (4a, a)$

- $\overline{HB} = B - H = (4a - 2a, 0 - a) = (2a, -a)$

$\therefore \overline{GC} \cdot \overline{HB} = 4a \times 2a + a \times (-a) = 8a^2 - a^2 = 7a^2 = A_{[EBCDGF]}$

27.2.1 Como a amplitude do ângulo OPB é $\frac{5\pi}{6}$, a inclinação da reta AB é $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.



Logo, o declive da reta AB é igual a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que a equação reduzida da reta AB é da forma:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b, \text{ com } b \in \mathbb{R}$$

Como o ponto $A(-\sqrt{3}, -2)$ pertence à reta AB , substituindo as suas coordenadas na equação, tem-se:

$$-2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3}) + b \Leftrightarrow -2 = -\frac{3}{3} + b \Leftrightarrow -2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Portanto, uma equação da reta AB é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x - 3 \Leftrightarrow 3y - \sqrt{3}x + 3 = 0$.

27.2.2 O ponto R pertence à reta AB , pelo que as suas coordenadas são da forma $\left(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1\right)$.

Tem-se que:

- o declive da reta AB é $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pelo que $\vec{u}(3, \sqrt{3})$ é um vetor diretor da reta AB ;
- as retas RS e AB são perpendiculares se \vec{RS} e \vec{u} forem perpendiculares, ou seja, se $\vec{RS} \cdot \vec{u} = 0$.

Como $\overline{RS} = S - R = \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x, -2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right) \right) = \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right)$, tem-se:

$$\overline{RS} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 \times \left(-\frac{7\sqrt{3}}{3} - x \right) + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow -7\sqrt{3} - 3x - x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x - 8\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -4x = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto R são $\left(-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2\sqrt{3}) - 1 \right)$, ou seja, $(-2\sqrt{3}, -3)$.

28.1 $\overline{BO} \cdot \overline{BA} = \|\overline{BO}\| \times \|\overline{BA}\| \times \cos(O\hat{B}A) = c \times c \times \cos(\pi - 2\alpha) = c^2(-\cos(2\alpha)) = -c^2 \cos(2\alpha)$

28.2 Tem-se $A(x_A, 0)$ e $B\left(\frac{x_A}{2}, y_B\right)$, $\cos \alpha = \frac{\frac{x_A}{2}}{c} \Leftrightarrow x_A = 2c \cos \alpha$ e $\sin \alpha = \frac{y_B}{c} \Leftrightarrow y_B = c \sin \alpha$.

De uma outra forma, $A(2x_B, 0)$ e $B(x_B, y_B)$, $\cos \alpha = \frac{x_B}{c} \Leftrightarrow x_B = c \cos \alpha$ e $\sin \alpha = \frac{y_B}{c} \Leftrightarrow y_B = c \sin \alpha$.

Portanto, tem-se $A(2c \cos \alpha, 0)$ e $B(c \cos \alpha, c \sin \alpha)$. Logo, o vetor $\overline{BO} = O - B$ tem coordenadas $(-c \cos \alpha, -c \sin \alpha)$ e o vetor $\overline{BA} = A - B$ tem coordenadas $(c \cos \alpha, -c \sin \alpha)$.

Portanto, $\overline{BO} \cdot \overline{BA} = \|\overline{BO}\| \times \|\overline{BA}\| \times \cos O\hat{B}A = -c \cos \alpha \times c \cos \alpha + (-c \sin \alpha) \times (-c \sin \alpha) =$
 $= -c^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha = c^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$.

28.3 Como $\overline{BO} \cdot \overline{BA} = -c^2 \cos(2\alpha)$ e $\overline{BO} \cdot \overline{BA} = c^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$, tem-se:

$$-c^2 \cos(2\alpha) = c^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \Leftrightarrow -c^2 \cos(2\alpha) = -c^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

29. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(3, a, -\frac{1}{2}\right)$ e um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(b, -3, 12)$. A reta r é paralela ao plano α se \vec{r} e \vec{n} forem perpendiculares, isto é, se $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.

Assim, $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3b - 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow 3b - 3a = 6 \Leftrightarrow -3(a - b) = 6 \Leftrightarrow a - b = -2$

Logo, $(a - b)^3 = (-2)^3 = -8$.

Resposta: B

30.1 O volume da pirâmide $[OABC]$ é dado por $\frac{1}{3} \times A_{base} \times altura = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times \overline{OC} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB} \times \overline{OC}}{6}$.

Como A , B e C são, respetivamente, os pontos de interseção do plano α com os eixos Ox , Oy e Oz , as suas coordenadas são, respetivamente, da forma $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Assim:

- $4x + 3 \times 0 + 8 \times 0 = 12 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$, pelo que as coordenadas de A são $(3, 0, 0)$;
- $4 \times 0 + 3y + 8 \times 0 = 12 \Leftrightarrow 3y = 12 \Leftrightarrow y = 4$, pelo que as coordenadas de B são $(0, 4, 0)$;
- $4 \times 0 + 3 \times 0 + 8z = 12 \Leftrightarrow 8z = 12 \Leftrightarrow z = \frac{12}{8} \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}$, pelo que as coordenadas de C são $(0, 0, \frac{3}{2})$;

Portanto, $\overline{OA} = 4$, $\overline{OB} = 3$ e $\overline{OC} = \frac{3}{2}$, pelo que o volume da pirâmide $[OABC]$ é: $\frac{4 \times 3 \times \frac{3}{2}}{6} = \frac{6 \times 3}{6} = 3$

30.2 Seja β o plano paralelo a α que contém o ponto de coordenadas $(-1, 2, 0)$.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(4, 3, 8)$, pelo que \vec{n} também é normal a β , dado que β é paralelo a α . Assim, uma equação cartesiana de β é da forma $4x + 3y + 8z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$.

Como o ponto de coordenadas $(-1, 2, 0)$ pertence a β , substituindo na equação de β , vem:

$$4 \times (-1) + 3 \times 2 + 8 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Logo, uma equação cartesiana de β é $4x + 3y + 8z - 2 = 0$.

30.3 Seja r a reta perpendicular ao plano α que contém o ponto de coordenadas $(-13, -14, -9)$. Designemos este ponto por D . Assim, a reta r intersesta o plano α no ponto D' , tal que a distância do ponto D ao plano α é dada por $\overline{DD'}$ (D' é a projeção ortogonal de D no plano α).

Como a reta r é perpendicular ao plano α , o vetor $\vec{n}(4, 3, 8)$, que é normal ao plano α , é um vetor diretor da reta r e, portanto, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (-13, -14, -9) + k(4, 3, 8), \quad k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta r tem coordenadas da forma $(-13+4k, -14+3k, -9+8k)$, pelo que, substituindo na equação de α , tem-se:

$$4 \times (-13+4k) + 3 \times (-14+3k) + 8 \times (-9+8k) = 12 \Leftrightarrow -52 + 16k - 42 + 9k - 72 + 64k = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 89k = 12 + 52 + 42 + 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 89k = 178 \Leftrightarrow k = \frac{178}{89} \Leftrightarrow k = 2$$

Portanto, as coordenadas de D' são $(-13+4 \times 2, -14+3 \times 2, -9+8 \times 2)$, ou seja, $(-5, -8, 7)$.

Então, a distância do ponto D ao plano α é dada por:

$$\overline{DD'} = \sqrt{(-13+5)^2 + (-14+8)^2 + (-9-7)^2} = \sqrt{356}$$

31.1 Tem-se que $E = M + \overline{ME}$, sendo M é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$M \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right) = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (1, 2, 1)$$

Um vetor normal ao plano ABC é $\vec{u}(1,1,1)$. Mas, como a pirâmide é reta e $[ABCD]$ é um losango, o vetor \overline{ME} também é um vetor normal a ABC . Assim, \overline{ME} e \vec{u} são colineares, pelo que existe um $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\overline{ME} = k\vec{u} = k(1,1,1) = (k, k, k)$.

Por outro lado, a altura da pirâmide é $3\sqrt{3}$, pelo que $\|\overline{ME}\| = 3\sqrt{3}$. Então:

$$\|\overline{ME}\| = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + k^2 + k^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3k^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{3}} \times \sqrt{k^2} = 3\cancel{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 3^2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3^2} \Leftrightarrow k = -3 \vee k = 3$$

Logo, se:

- $k = -3$, então $\overline{ME}(-3, -3, -3)$ e $E = M + \overline{ME}$, ou seja, neste caso, as coordenadas do ponto E são $(1-3, 2-3, 1-3) = (-2, -1, -2)$, que não pertence ao primeiro octante;
- $k = 3$, então $\overline{ME}(3, 3, 3)$ e $E = M + \overline{ME}$, ou seja, neste caso as coordenadas do ponto E são $(1+3, 2+3, 1+3) = (4, 5, 4)$, que pertence ao primeiro octante.

$\therefore E(4, 5, 4)$

31.2 Como a pirâmide é reta e como $[ABCD]$ é um losango, o vetor \overrightarrow{AC} é normal ao plano BDE .

Tem-se $\overrightarrow{AC} = C - A$, pelo que as coordenadas de \overrightarrow{AC} são $(2-0, 3-1, -1-4) = (2, 2, -4)$ e, portanto, uma equação cartesiana do plano BDE é da forma $2x + 2y - 4z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$.

Como o ponto E pertence ao plano BDE , substituindo as suas coordenadas na equação de BDE , tem-se $2 \times 4 + 2 \times 5 - 4 \times 4 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.

Logo, $BDE: 2x + 2y - 4z - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z - 1 = 0$.

31.3 A amplitude do ângulo AEC é igual à amplitude do ângulo formado pelos vetores \overrightarrow{EA} e \overrightarrow{EC} , que é dada por:

$$\cos(\widehat{AEC}) = \cos(\widehat{EA \ EC}) = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}}{\|\overrightarrow{EA}\| \times \|\overrightarrow{EC}\|}$$

Tem-se $\overrightarrow{EA} = A - E$, ou seja, as coordenadas de \overrightarrow{EA} são $(0-4, 1-5, 3-4) = (-4, -4, -1)$ e $\overrightarrow{EC} = C - E$, ou seja, as coordenadas de \overrightarrow{EC} são $(2-4, 3-5, -1-4) = (-2, -2, -5)$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \cos(\widehat{AEC}) &= \cos(\widehat{EA \ EC}) = \frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}}{\|\overrightarrow{EA}\| \times \|\overrightarrow{EC}\|} = \frac{-4 \times (-2) - 4 \times (-2) - 1 \times (-5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}} = \\ &= \frac{8 + 8 + 5}{\sqrt{16 + 16 + 1} \times \sqrt{4 + 4 + 25}} = \frac{21}{\sqrt{33} \times \sqrt{33}} = \frac{21}{33} \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{AEC} = \cos^{-1}\left(\frac{21}{33}\right) \approx 50,48^\circ$.

32.1 O ponto C pertence ao eixo Oz , pelo que as suas coordenadas são da forma $(0, 0, z)$, com $z \in \mathbb{R}$. Como o ponto C pertence ao plano ABC , tem-se $2 \times 0 + 0 + 2z = 8 \Leftrightarrow 2z = 8 \Leftrightarrow z = 4$, pelo que as coordenadas de C são $(0, 0, 4)$.

Tem-se que $A = C + \overrightarrow{CA} = C - \overrightarrow{AC}$, pelo que as coordenadas do ponto A são:

$$(0 - (-4), 0 - 4, 4 - 2) = (4, -4, 2)$$

32.2 Por três pontos não colineares passa um único plano. Os pontos A , C e D são três pontos não colineares, pelo que, se pertencerem ao plano definido por $4x + 5y - 2z + 8 = 0$, este plano é ACD .

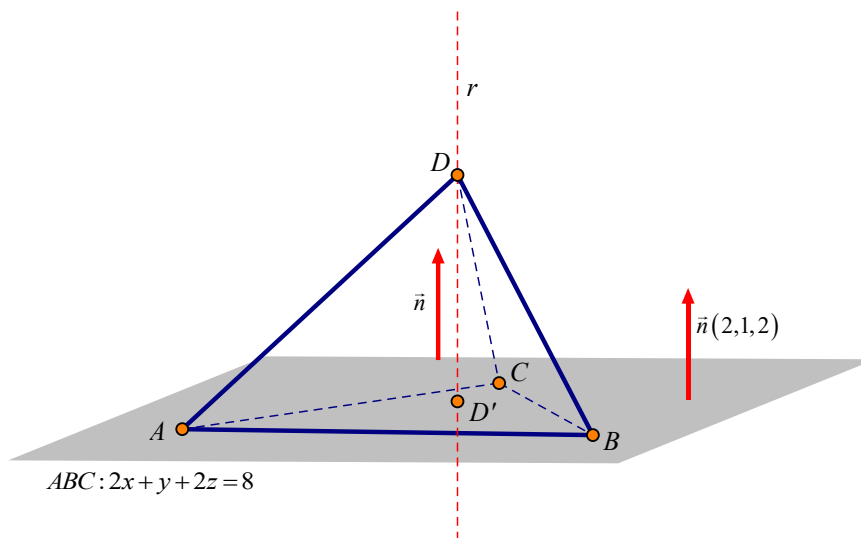
Substituindo $A(4, -4, 2)$: $4 \times 4 + 5 \times (-4) - 2 \times 2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $C(0, 0, 4)$: $4 \times 0 + 5 \times 0 - 2 \times 4 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Substituindo $D(-2, 0, 0)$: $4 \times (-2) + 5 \times 0 - 2 \times 0 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Proposição verdadeira

Logo, uma equação cartesiana do plano CAD é $4x + 5y - 2z + 8 = 0$.

32.3 Consideremos a seguinte figura.



O volume da pirâmide é dado por $\frac{1}{3} A_{[ABC]} \times \overline{DD'} = \frac{1}{3} \times 12 \times \overline{DD'} = 4\overline{DD'}$, em que D' é a projeção ortogonal do vértice D no plano ABC .

Seja r a reta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto D . Assim, a reta r intersecta o plano ABC no ponto D' .

Como a reta r é perpendicular ao plano ABC , o vetor $\vec{n}(2, 1, 2)$, que é normal ao plano ABC , é um vetor diretor da reta r e, portanto, como $D(-2, 0, 0)$, uma equação vetorial de r é:

$$(x, y, z) = (-2, 0, 0) + k(2, 1, 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta r tem coordenadas da forma $(-2 + 2k, k, 2k)$, pelo que, substituindo na equação de ABC , tem-se:

$$2 \times (-2 + 2k) + k + 2 \times 2k = 8 \Leftrightarrow -4 + 4k + k + 4k = 8 \Leftrightarrow 9k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{12}{9} \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

Portanto, as coordenadas de D' são $\left(-2+2\times\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 2\times\frac{4}{3}\right)$, ou seja, $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

$$\text{Então } \overline{DD'} = \sqrt{\left(-2-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{144}{9}} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\therefore V_{[ABCD]} = \frac{1}{3} A_{[ABC]} \times \overline{DD'} = 4\overline{DD'} = 4 \times 4 = 16.$$

33.1 O ponto C pertence ao eixo Oy , pelo que as suas coordenadas são da forma $(0, y, 0)$, com $y \in \mathbb{R}$, e pertence à reta DC .

Como a reta DC é perpendicular ao plano ADE , admite vetores diretores colineares aos vetores normais a esse plano. Como o vetor de coordenadas $(1, -4, 3)$ é normal ao plano ADE , é então diretor da reta DC , pelo que a reta DC pode ser definida pela equação vetorial:

$$(x, y, z) = (1, 1, 3) + k(1, -4, 3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta DC tem, coordenadas da forma $(1+k, 1-4k, 3+3k)$, $k \in \mathbb{R}$. Assim:

$$(0, y, 0) = (1+k, 1-4k, 3+3k), \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+k=0 \\ 1-4k=y \\ 3+3k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ 5=y \end{cases}$$

Portanto, as coordenadas do ponto C são $(0, 5, 0)$.

33.2 O plano ABD é perpendicular à reta CH , pelo que um vetor normal a ABD é \overline{CH} (que é um vetor diretor da reta CH).

As coordenadas do vetor $\overline{CH} = H - C$ são $\left(5-0, 11-5, 0-\frac{19}{3}\right) = \left(5, 6, -\frac{19}{3}\right)$, pelo que uma equação cartesiana do plano ABD é da forma $5x + 6y - \frac{19}{3}z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$.

Como o ponto C pertence ao plano ABD , substituindo as suas coordenadas na equação de ABD , tem-se $5 \times 0 + 6 \times 5 - \frac{19}{3} \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -30$.

Conclui-se que $5x + 6y - \frac{19}{3}z - 30 = 0 \Leftrightarrow 15x + 18y - 19z - 90 = 0$ é uma equação cartesiana do plano ABD .

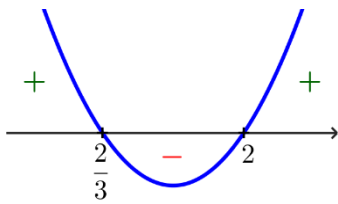
33.3 O vetor $\overrightarrow{CD} = D - C$ tem coordenadas $(1-0, 1-5, 3-0) = (1, -4, 3)$.

Tem-se que $\overrightarrow{CD} \cdot \vec{u} = 1 \times 4 + (-4) \times 2k + 3 \times k^2 = 4 - 8k + 3k^2$.

Para que o ângulo dos vetores \overrightarrow{CD} e \vec{u} seja obtuso, tem de se ter $\overrightarrow{CD} \cdot \vec{u} < 0$ e \overrightarrow{CD} e \vec{u} não podem ser colineares, ou seja, $4 - 8k + 3k^2 < 0$ e \overrightarrow{CD} e \vec{u} não podem ser colineares.

Determinados os zeros do polinómio $4 - 8k + 3k^2$:

$$4 - 8k + 3k^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 3 \times 4}}{2 \times 3} \Leftrightarrow k = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} \Leftrightarrow k = \frac{8 \pm 4}{6} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \vee k = 2$$



Portanto, $4 - 8k + 3k^2 < 0 \Leftrightarrow k \in \left] \frac{2}{3}, 2 \right[$.

Vejamos se \overrightarrow{CD} e \vec{u} podem ser colineares, isto é, se podemos ter $\frac{4}{1} = \frac{2k}{-4} = \frac{-k^2}{3}$, para algum k real:

$\frac{4}{1} = \frac{2k}{-4} \wedge \frac{4}{1} = \frac{k^2}{3} \Leftrightarrow k = -8 \wedge k^2 = 12 \Leftrightarrow k = -8 \wedge k = \pm\sqrt{12}$, que é uma condição impossível em \mathbb{R} , pelo que não existe qualquer k real tal que \overrightarrow{CD} e \vec{u} sejam colineares.

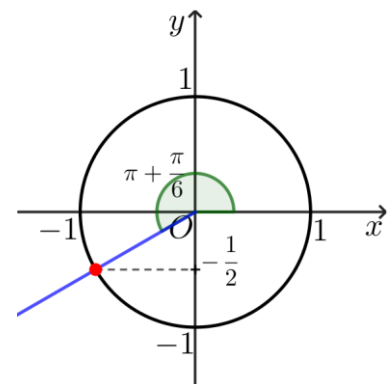
Portanto, o ângulo dos vetores \overrightarrow{CD} e \vec{u} é obtuso se, e somente se, $k \in \left] \frac{2}{3}, 2 \right[$.

33.4 Se $P\left(-\sin\theta, \frac{\sin\theta}{2}, 1 - \sin\theta\right)$ pertence ao plano ADE , então, substituindo as suas coordenadas na sua equação, tem-se:

$$-\sin\theta - 4 \times \frac{\sin\theta}{2} + 3 \times (1 - \sin\theta) = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin\theta - 2\sin\theta + 3 - 3\sin\theta = 6 \Leftrightarrow -6\sin\theta = 3 \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

Como $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, conclui-se que $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.



FIM