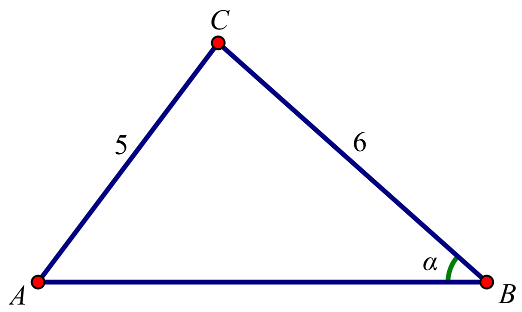
Avaliação – Itens para testes de avaliação

Matemática A | 11.º Ano

Tópicos: Trigonometria. Funções trigonométricas. Produto escalar.

Trigonometria

1. Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$, acutângulo.



Sabe-se que $\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$ e que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, sendo α a amplitude do ângulo ABC.

Qual é o valor de $\overline{AB}$?

A $3+\sqrt{5}$

B $4+\sqrt{5}$

C $3+2\sqrt{5}$

D $4+2\sqrt{5}$

2. Sejam r e θ, respetivamente, o raio e a amplitude, em radianos, de um setor circular de perímetro $4r$.

Considerando valores aproximados às milésimas, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $\cos\theta\approx-0,654$

B $\operatorname{sen}\theta\approx-0,759$

C $\cos\theta\approx0,416$

D $\operatorname{sen}\theta\approx0,909$

3. Qual é a amplitude do ângulo orientado com os mesmos lados origem e extremidade que o ângulo generalizado de amplitude 1345°?

A -95°

B 210°

C 95°

D 265°

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

4. Sejam α e β as amplitudes de dois ângulos com o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.

Se $\beta = -\frac{125\pi}{6}$, qual dos seguintes pode ser o valor de α?

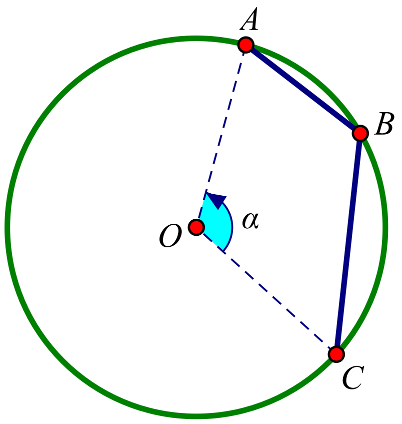
[A] $\frac{7\pi}{6}$

[B] $\frac{5\pi}{6}$

[C] $\frac{\pi}{6}$

[D] $-\frac{7\pi}{6}$

5. Na figura, está representada uma circunferência e o ângulo orientado COA, de amplitude α.



Sabe-se que $[BC]$ é o lado de um pentágono regular inscrito na circunferência e $[AB]$ é o lado de um octógono regular inscrito na circunferência.

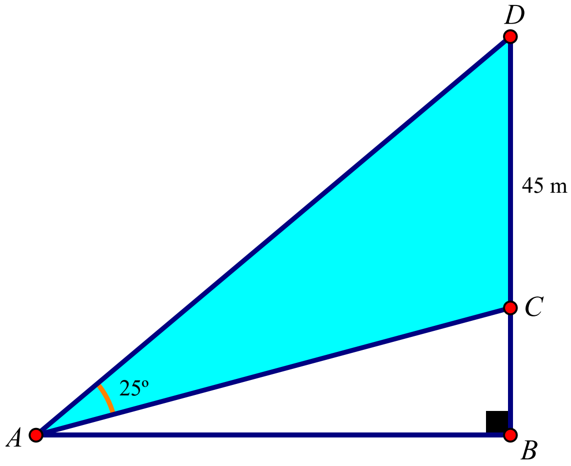
Considera o ângulo generalizado β de amplitude $\alpha - 2560^\circ$.

Determina a amplitude do ângulo generalizado β e escreve-a recorrendo à amplitude do respetivo ângulo orientado.

6. Na figura, o triângulo $[ABD]$ é retângulo em B e o triângulo $[ACD]$ representa o jardim de um palácio.

Sabe-se que:

- $\overline{CD} = 45$ m;
- $C\hat{A}D = 25^\circ$;
- o ângulo ACD tem mais 30° de amplitude do que o ângulo ACB.



Determina a área do jardim. Apresenta o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades.

7. Para um certo valor real de α , sabe-se que $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{3}$.

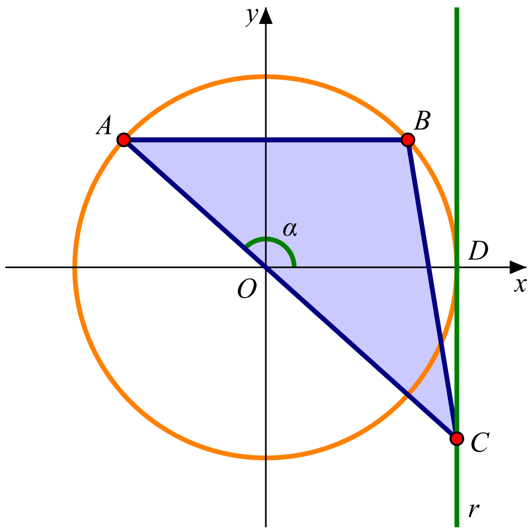
Qual é o valor de $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$?

A -3 **B** $-\frac{3}{2}$ **C** $\frac{3}{2}$ **D** 3

8. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta r .

Sabe-se que:

- a reta r é perpendicular ao eixo Ox e tangente à circunferência do ponto D;
- os pontos A e B pertencem à circunferência trigonométrica;
- o lado $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- a reta AO interseta a reta r no ponto C;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOA, com $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.



8.1 Mostra que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por $\operatorname{sen}\alpha(1-\cos\alpha)$.

8.2 Para um certo valor de $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, tem-se $(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2=1+\operatorname{sen}\alpha$.

Determina a área do triângulo $[ABC]$ para esse valor de α .

9. Seja $\alpha\in]-\pi,0[$ tal que $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos(\alpha-3\pi)<0$.

Qual das seguintes expressões designa um número real positivo?

A $\operatorname{sen}\alpha\times\cos\alpha$

C $\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$

B $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{sen}\alpha$

D $\operatorname{tg}\alpha\times\cos\alpha$

10. Considera, para $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, a expressão:

$$A(x) = \frac{\cos\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \cos(x + \pi) - \operatorname{tg}(x - 3\pi)$$

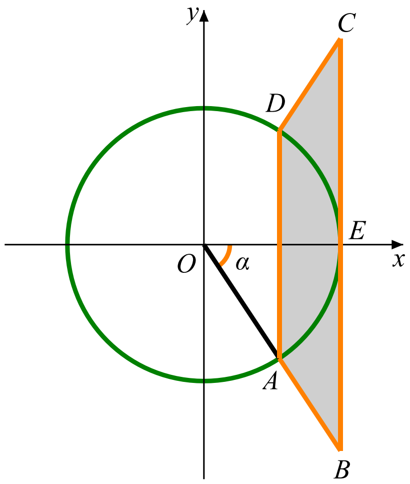
10.1 Mostra que $A(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$.

10.2 Determina o valor de $A\left(\frac{11\pi}{6}\right) - A\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

10.3 Seja $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ tal que $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{8}$.

Determina o valor de $A(\alpha)$.

11. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência trigonométrica e ao eixo Ox;
- os pontos A e D pertencem à circunferência trigonométrica e são simétricos em relação ao eixo Ox;
- a reta BC é tangente à circunferência trigonométrica no ponto E;
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo EOA, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função, de α por $-\operatorname{sen}^2 \alpha \times \operatorname{tg} \alpha$.

12. Mostra que para $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 x \times \operatorname{sen}^2 x$

Funções trigonométricas

13. Qual das seguintes é uma expressão geral dos maximizantes da função seno?

A $k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

B $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

C $\frac{5\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

D $2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

14. Num determinado quadrante, a função seno é decrescente e positiva. Nesse quadrante, a função cosseno é

A crescente e positiva.

B crescente e negativa.

C decrescente e positiva.

D decrescente e negativa.

15. Considera a função g , definida em $\mathbb{R}$, por $g(x)=\cos x$ e seja $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $g(\alpha)=-\frac{1}{3}$.

Seja $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $g(\beta)=\frac{1}{3}$.

Das opções seguintes, qual pode ser igual a β ?

A $\frac{\pi}{2}+\alpha$

B $\pi+\alpha$

C $2\pi-\alpha$

D $2\pi+\alpha$

16. Considera a função f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x)=3+2\cos x$.

16.1 Mostra que a função f não tem zeros.

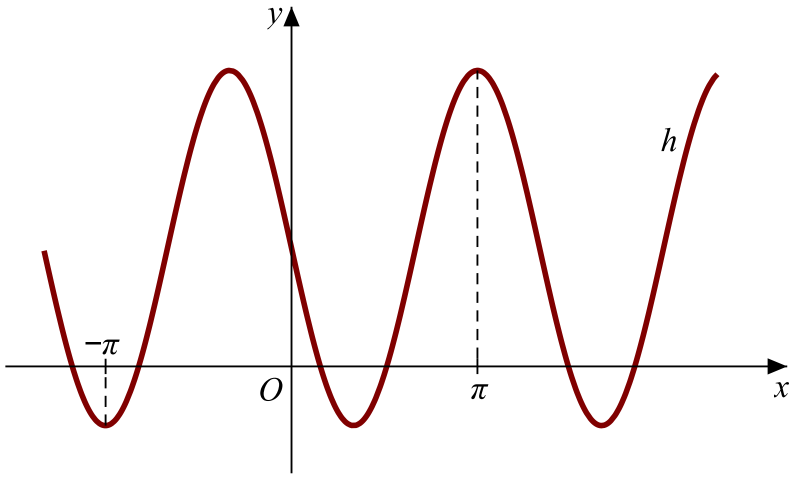
16.2 Determina, no intervalo $\left]-\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, os objetos cuja imagem por meio da função f são iguais a 2.

17. Considera a função g , definida em $\mathbb{R}$, por $g(x)=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

17.1 Escreve a expressão geral dos zeros da função g .

17.2 Seja α o menor minimizante positivo da função g . Qual é o valor de $\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$?

18. Na figura, está representado parte do gráfico de uma função sinusoidal h em que estão assinalados um dos seus maximizantes e um dos seus minimizantes.



Qual é a frequência desta função?

A $\frac{4\pi}{3}$ **B** $\frac{1}{2\pi}$ **C** 2π **D** $\frac{3}{4\pi}$

19. Considera as seguintes afirmações acerca da função tangente.

I. A função tangente é crescente em todo o seu domínio.

II. 2π é período da função tangente.

Em relação ao valor lógico das afirmações, qual das seguintes opções é a correta?

A São ambas falsas.

B I é verdadeira e a II é falsa.

C I é falsa e II é verdadeira.

D São ambas verdadeiras.

20. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-2,4]$, definida por

$$g(x)=k-2+k\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \text{ com } k\in\mathbb{R}^+$$

20.1 Mostra que $k=3$.

20.2 Seja $\alpha\in\left]-\pi,0\right[$ tal que $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Determina o valor de $g(2\alpha+\pi)+\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$.

21. Um ponto P descola-se sobre uma reta numérica de tal forma que a sua abcissa x é dada em função de t, em minutos, por $x(t)=4\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, com $t\geq 0$.

21.1 Qual é o período positivo mínimo da função x? Interpreta o resultado no contexto do problema.

21.2 Qual é a distância mínima do ponto P à origem da reta numérica?

21.3 Nos primeiros vinte segundos do movimento, houve um instante t_0 tal que passado o mesmo tempo que decorreu até esse instante t_0, a abcissa do ponto P aumentou três unidades.

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o instante t_0, em minutos, arredondado às centésimas.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema;
- representar, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinalar o(s) ponto(s) relevante(s), que te permitam resolver a equação.

22. Entende-se por comprimento do dia, num determinado local, o tempo decorrido entre o instante em que ocorre o nascer do Sol e o instante em que ocorre o pôr do Sol.

Na tabela seguinte, apresentam-se os comprimentos de alguns dias, em horas, em Aveiro, no ano de 2025. Dados retirados do site sunsire.maplogs.com.

Ordem do dia, x	Comprimento do dia, $C(x)$
1	9,31
34	10,16
67	11,55
100	13,03
133	14,34
166	15,06
199	14,76
232	13,64
265	12,22
298	10,78
331	9,61
364	9,29

Um modelo que descreve bem a relação entre o comprimento do dia em Aveiro e a ordem desse dia é o de regressão sinusoidal e pode ser definido por:

$$C(x)=a\,\mathrm{sen}(bx+c)+d\text{, com } x\in\{1,2,3,\ldots,365\}\text{,}$$

em que a, b, c e d são parâmetros reais e $C(x)$ é o comprimento do dia, em horas, em Aveiro, no dia de ordem x.

Estima, com base no modelo de regressão sinusoidal obtido a partir dos dados da tabela, o comprimento do dia, em horas, em Aveiro, no dia 11 de junho de 2025.

Apresenta o resultado em horas, arredondado às unidades.

Na tua resolução, começa por determinar, com auxílio da calculadora, os parâmetros a, b, c e d, arredondados às milésimas.

Produto escalar

23. Considera, em referencial o.n. Oxy, a reta r de equação $10y+5x=6$.

23.1 Qual é a inclinação, em graus, arredondados às unidades, da reta r?

23.2 Seja s a reta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas $(1,4)$.

Qual é a equação reduzida da reta s?

A $y=2x+2$

B $y=-2x+6$

C $y=-2x+\dfrac{5}{3}$

D $y=2x+\dfrac{3}{5}$

24. Considera, em referencial o.n. Oxy, as retas r e s definidas, respetivamente, por $\sqrt{3}x-y+2=0$ e $(x,y)=(0,2)+k\left(3,\sqrt{3}\right)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Mostra que a amplitude do ângulo das retas r e s é 30°.

25. Considera, em referencial ortonormado, Oxy, dois vetores não colineares, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=2$.

Qual dos valores seguintes não pode ser igual ao produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$?

A 1

B 2

C 3

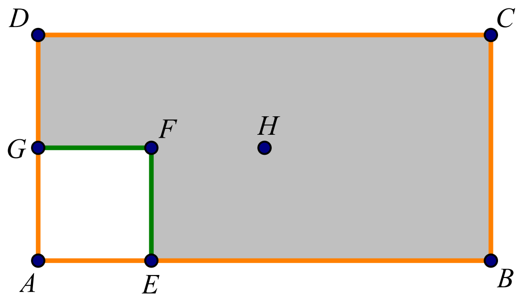
D 4

26. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de norma 1, tais que:

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares;
- $4\vec{v}\cdot\left(2\vec{u}-\sqrt{3}\vec{w}\right)=6$.

Qual é a amplitude, em radianos, do ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$?

27. Na figura, estão representados o retângulo $[ABCD]$ e o quadrado $[AEFG]$.



Sabe-se que:

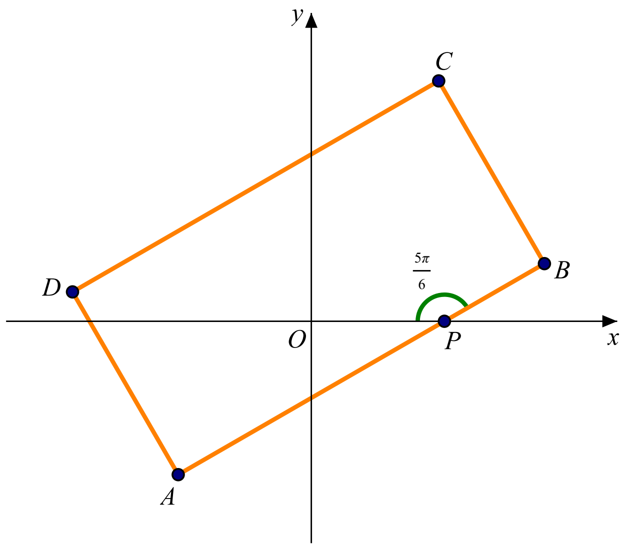
- $\overline{AB} = 2\overline{AD}$;
- G é o ponto médio do lado $[AD]$ e H é o centro do retângulo $[ABCD]$.

27.1 Mostra que a área do hexágono $[EBCDGF]$ é dada por $\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{HB}$.

27.2 Na figura, está representado, em referencial o.n. Oxy, o retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $\left(-\sqrt{3}, -2\right)$;
- a reta AB intersecta o Ox no ponto P;
- a amplitude do ângulo OPB é $\frac{5\pi}{6}$.

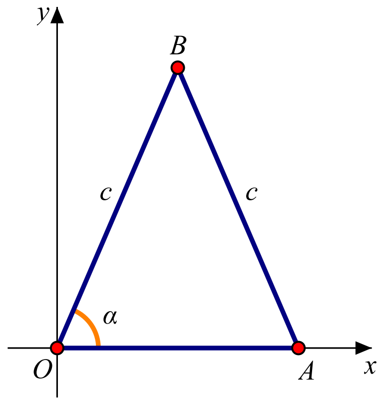


27.2.1 Mostra que uma equação que define a reta AB é $3y - \sqrt{3}x + 3 = 0$.

27.2.2 Sejam $S\left(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, -2\right)$ e R um ponto pertencente à reta AB.

Determina as coordenadas do ponto R de modo que as retas RS e AB sejam perpendiculares.

28. Na figura, está representado, em referencial o.n. Oxy, o triângulo isósceles $[OAB]$, tal que $\overline{OB} = \overline{AB} = c$, com $c > 0$.



Sabe-se que a amplitude, em radianos, do ângulo AOB é α, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

28.1 Mostra que $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = -c^2 \cos(2\alpha)$.

28.2 Escreve as coordenadas de A e B em função de α, e utiliza-as para mostrar que $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = c^2\left(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha\right)$.

28.3 Tendo em conta os resultados das alíneas anteriores, mostra que se tem:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

29. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a reta r e o plano α, definidos por:

$$r:(x,y,z) = (0,2,3) + k\left(3, a, -\frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{R}$$

e

$$\alpha: bx - 3y + 12z = 1$$

Sabendo que a reta r é paralela a plano α, qual é o valor de $(a-b)^3$?

A -2 **B** -8 **C** 2 **D** 8

30. Considera, em referencial ortonormado $Oxyz$, o plano α definido por $4x + 3y + 8z = 12$.

30.1 Sejam A, B e C os pontos de interseção do plano α com os eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente.

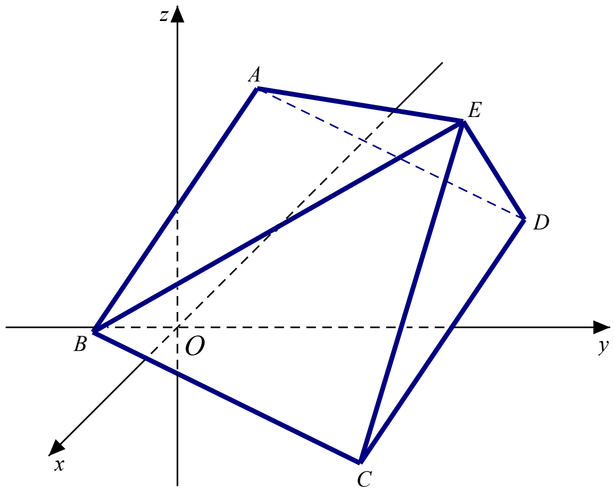
Determina o volume da pirâmide triangular $[OABC]$.

30.2 Escreve uma equação cartesiana do plano paralelo a α e que contém o ponto de coordenadas $(-1,2,0)$.

30.3 Determina a distância do ponto de coordenadas $(-13,-14,-9)$ ao plano α.

31. Na figura, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide reta $[ABCDE]$.

Sabe-se que:



- a base $[ABCD]$ é um losango;
- $A(0,1,3)$, $C(2,3,-1)$ e E pertence ao primeiro octante;
- uma equação do plano ABC é $x+y+z-4=0$;
- a altura da pirâmide é $3\sqrt{3}$.

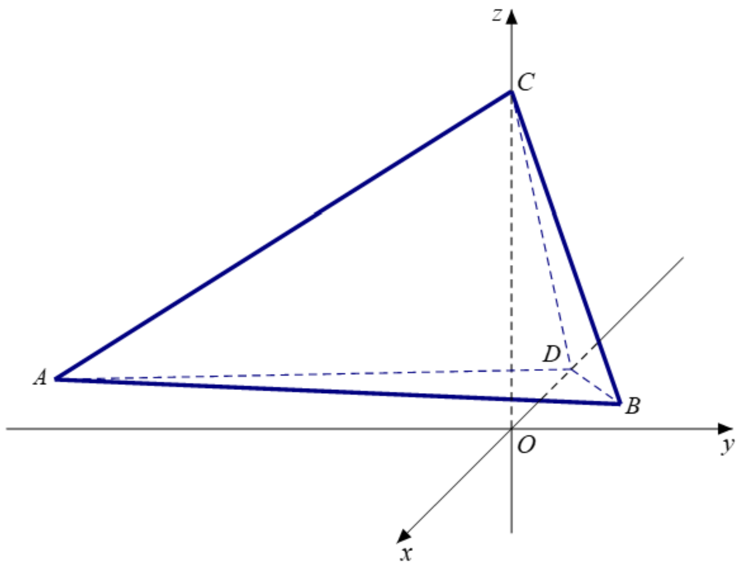
31.1 Mostra que as coordenadas do ponto E são $(4,5,4)$.

31.2 Determina uma equação cartesiana do plano BDE.

31.3 Determina, em graus, com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo AEC.

32. Considera, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- o ponto C pertence ao eixo Oz;
- $\overrightarrow{AC}(-4,4,2)$;
- $D(-2,0,0)$;
- uma equação do plano ABC é $2x+y+2z=8$.

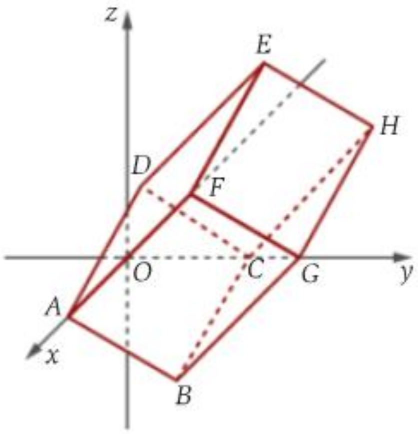
32.1 Mostra que as coordenadas do ponto C são $(0,0,4)$ e que as coordenadas do ponto A são $(4,-4,2)$.

32.2 Mostra que uma equação cartesiana do plano ACD é $4x+5y-2z+8=0$.

32.3 Supõe que a área do triângulo $[ABC]$ é 12.

Determina o volume da pirâmide $[ABCD]$.

33. Na figura, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- as coordenadas do ponto D são $(1,1,3)$ e as do ponto H são $\left(5,11,\frac{19}{3}\right)$;
- uma equação cartesiana do plano ADE é $x-4y+3z=6$.

33.1 Mostra que as coordenadas do ponto C são $(0,5,0)$.

33.2 Determina uma equação cartesiana do plano ABD.

33.3 Determina os valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que o ângulo dos vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\vec{u}\left(4,2k,k^2\right)$ seja obtuso.

33.4 Determina $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $P\left(-\operatorname{sen}\theta,\frac{\operatorname{sen}\theta}{2},1-\operatorname{sen}\theta\right)$ pertença ao plano ADE.

FIM

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta