Teste de Matemática A

2025 / 2026

Teste N.º 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \,(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Numa escola, vai ser organizada uma sessão fotográfica para os membros do clube de ciência. Dez destes membros, dos quais cinco são alunos de robótica, dois de astronomia e três de matemática, vão sentar-se nas duas primeiras filas de um auditório. Cada fila tem cinco lugares, numerados de 1 a 5. Pretende-se que os três alunos de matemática fiquem juntos na mesma fila. De quantas maneiras diferentes se podem, deste modo, dispor os dez alunos?

(A) $3\ 628\ 800$ **(B)** $604\ 800$ **(C)** $302\ 400$ **(D)** $181\ 440$

2. Dispõe-se de catorze carateres (os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais *a, e, i, o, u*) para formar códigos de cinco carateres.

Pretende-se formar um código que satisfaça as seguintes condições:

- os cinco carateres serem todos diferentes;
- o primeiro caráter ser uma vogal;
- o código conter exatamente duas vogais.

Quantos códigos que obedeçam a estas condições é possível formar?

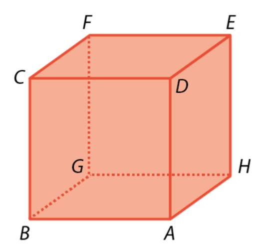
3. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas entre quatro naipes (espadas, copas, paus e ouros). Em cada naipe há 13 cartas: um ás, três figuras (dama, valete e rei) e nove cartas (do 2 ao 10).

Extraem-se, sucessivamente e sem reposição, quatro cartas, dispondo-as numa mesa, lado a lado. Qual das expressões seguintes representa o número de extrações diferentes que é possível realizar, de modo que a primeira carta seja um ás e a última carta seja de paus?

(A) $12 \times {}^{50}A_2 + 3 \times 13 \times {}^{50}A_2$ **(B)** $12 \times {}^{50}C_2 + 3 \times 13 \times {}^{50}C_2$

(C) $4 \times {}^{50}A_2 \times 13$ **(D)** $4 \times {}^{50}C_2 \times 13$

4. Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.



Pretende-se pintar as seis faces do cubo $[ABCDEFGH]$, dispondo-se, para o efeito, de oito cores distintas. Todas as condições seguintes deverão ser respeitadas:

- cada face é pintada com uma só cor;
- são utilizadas, no mínimo, cinco das oito cores disponíveis;
- duas faces que tenham uma aresta em comum são pintadas com cores diferentes.

A expressão seguinte representa o número total de formas possíveis de pintar as seis faces do cubo respeitando as condições enunciadas:

$$3 \times 8 \times {}^{7}C_4 \times 4! + {}^{8}A_6$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

5. Um saco contém apenas bolas azuis e bolas brancas, todas indistinguíveis ao tato. Sabe-se que 40% das bolas são brancas. Extraem-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

Sabe-se que a probabilidade de serem extraídas duas bolas da mesma cor é $\frac{33}{65}$.

Seja n o número total de bolas contidas inicialmente no saco. Determine o valor de n.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- resolver a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

6. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos possíveis, ($A \subset E$ e $B \subset E$). Sabe-se que:

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}85$
- $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}55$

Qual é o valor de $P(\bar{B})$?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}7$ **(D)** $0{,}75$

7. Numa escola, relativamente aos alunos do 12.º ano, sabe-se que:

- o número de alunos que frequentam a disciplina de Física é o triplo do número de alunos que frequentam a disciplina de Química;
- o número de alunos que frequentam, pelo menos, uma dessas disciplinas é o quádruplo do número de alunos que frequentam ambas as disciplinas.

Seleciona-se, ao acaso, um aluno do 12.º ano dessa escola.

Determine a probabilidade de esse aluno não frequentar a disciplina de Física, sabendo que frequenta a disciplina de Química. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

8. Numa *meetup* de tecnologia estão presentes participantes de várias empresas. Dos presentes, 36 são da empresa X e, destes, 12 são engenheiros de *back-end*.

8.1 Seleciona-se, ao acaso, um participante presente nesta *meetup*.

Sabe-se que a probabilidade de esse participante não ser da empresa X ou não ser engenheiro de *back-end* é igual a $\frac{7}{8}$.

Determine o número total de participantes presentes nesta *meetup*.

8.2 Dos participantes da empresa X, vão ser selecionados, ao acaso, três para apresentarem um projeto.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, um desses três participantes ser engenheiro de *back-end*?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

9. A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é $131\,072$. Quantos elementos dessa linha são superiores a 5000?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 11

10. Sejam n e p dois números naturais.

Determine, para quaisquer que sejam os valores de n e p tais que $n > 3$ e $n + 1 > p$, o valor da expressão:

$$\frac{{}^{n+2}C_{n-p} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!}$$

11. O produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de uma dada linha do triângulo de Pascal é 729.

Qual é o sexto elemento da linha seguinte?

(A) 376 740 **(B)** 296 010 **(C)** 98 280 **(D)** 80 730

12. Considere o desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, com $x > 0$, ordenado segundo as potências decrescentes da primeira parcela.

Sabe-se que o sexto termo é o termo independente de x.

Determine-o, recorrendo a processos analíticos.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1**	**8.2**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**TOTAL**
10	18	10	18	20	10	18	20	18	10	20	10	18	**200**

Teste N.º 1 de Matemática A • 12.º Ano
Proposta de resolução

1. Opção (D)

$2 \times 3 \times 3! \times 7! = 181\ 440$

2. $5 \times 4^2 \times {}^9A_3 = 40\ 320$

3. Opção (A)

Existem duas alternativas mutuamente exclusivas que devem ser tidas em consideração: a primeira carta é um ás de paus ou a primeira carta é um ás que não é de paus.

Assim, $1 \times 12 \times {}^{50}A_2 + 3 \times 13 \times {}^{50}A_2$.

4. A primeira parcela, $3 \times 8 \times {}^7C_4 \times 4!$, corresponde ao número de formas distintas de, cumprindo os requisitos do enunciado, serem utilizadas exatamente cinco cores para pintar o cubo. Uma vez que duas faces que tenham uma aresta em comum são pintadas com cores diferentes, existem 3 formas de se escolher as faces opostas que serão pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas, existem 8 opções na escolha da cor e, para cada uma destas, existem ${}^7C_4$ maneiras de serem escolhidas quatro das sete cores restantes, sendo que, para cada uma destas, existem $4!$ modos distintos de pintar as restantes quatro faces ainda não pintadas.

A segunda parcela, ${}^8A_6$, corresponde ao número de maneiras de pintar as faces do cubo, com seis das oito cores disponíveis, permutando as cores pelas faces.

5. Uma vez que $0{,}4n$ bolas são brancas, então $0{,}6n$ bolas são pretas.

Sabe-se que a probabilidade de serem extraídas duas bolas da mesma cor é $\frac{33}{65}$, pelo que:

$$\frac{{}^{0,4n}C_2 + {}^{0,6n}C_2}{{}^nC_2} = \frac{33}{65} \Leftrightarrow \frac{\frac{(0{,}4n)!}{(0{,}4n-2)! \times 2!} + \frac{(0{,}6n)!}{(0{,}6n-2)! \times 2!}}{\frac{n!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{33}{65}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{0{,}4n(0{,}4n-1)(0{,}4n-2)!}{(0{,}4n-2)! \times 2!} + \frac{0{,}6n(0{,}6n-1)(0{,}6n-2)!}{(0{,}6n-2)! \times 2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{33}{65}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}4n(0{,}4n-1)+0{,}6n(0{,}6n-1)}{n(n-1)} = \frac{33}{65}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{n>1} \frac{0{,}4(0{,}4n-1)+0{,}6(0{,}6n-1)}{n-1} = \frac{33}{65}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}16n-0{,}4+0{,}36n-0{,}6}{n-1} = \frac{33}{65}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}52n-1}{n-1} = \frac{33}{65}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{n>1} 65(0{,}52n - 1) = 33(n - 1)$$

$$\Leftrightarrow 33{,}8n - 65 = 33n - 33$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8n = 32$$

$$\Leftrightarrow n = 40$$

O valor de n é 40.

6. Opção (B)

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}85 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0{,}85$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0{,}85$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}15$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow P(B) = 0{,}15 + 0{,}55$

$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}7$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) \Leftrightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0{,}7$

$\Leftrightarrow P(\bar{B}) = 0{,}3$

7. Sejam F e Q os acontecimentos:

F: “O aluno frequenta a disciplina de Física.”

Q: “O aluno frequenta a disciplina de Química.”

Tem-se que:

- $P(F) = 3P(Q)$
- $P(F \cup Q) = 4P(F \cap Q)$

Assim:

$P(F \cup Q) = 4P(F \cap Q) \Leftrightarrow P(F) + P(Q) - P(F \cap Q) = 4P(F \cap Q)$

$\Leftrightarrow 3P(Q) + P(Q) = 5P(F \cap Q)$

$\Leftrightarrow 4P(Q) = 5P(F \cap Q)$

$\Leftrightarrow \frac{P(F \cap Q)}{P(Q)} = \frac{4}{5}$

Pretende-se determinar a probabilidade de, selecionando, ao acaso, um aluno do 12.º ano, esse aluno não frequentar a disciplina de Física, sabendo que frequenta a disciplina de Química, isto é, $P(\bar{F}|Q)$.

$P(\bar{F}|Q) = \frac{P(\bar{F} \cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = \frac{P(Q) - P(F \cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = 1 - \frac{P(F \cap Q)}{P(Q)}$

$\Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = 1 - \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow P(\bar{F}|Q) = \frac{1}{5}$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{5}$.

8.

8.1 Consideremos os seguintes acontecimentos:

X: “Ser participante da empresa X.”

E: “Ser engenheiro de *back-end*.”

$P(\bar{X} \cup \bar{E}) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow P(\overline{X \cap E}) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 1 - P(X \cap E) = \frac{7}{8}$

$\Leftrightarrow P(X \cap E) = \frac{1}{8}$

Seja n o número total de participantes presentes nesta *meetup*:

$$\frac{12}{n} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow n = 96$$

O número total de participantes presentes nesta *meetup* foi 96.

8.2 Sabe-se que, dos presentes, 36 são da empresa X e, destes, 12 são engenheiros de *back-end*, de onde se conclui que os restantes 24 não são engenheiros de *back-end*.

Comecemos por determinar a probabilidade de, selecionando, ao acaso, três participantes, de entre os participantes da empresa X para apresentarem um projeto, nenhum ser engenheiro de *back-end*.

$p = \frac{{}^{24}C_3}{{}^{36}C_3} = \frac{2024}{7140} = \frac{506}{1785}$

Desta forma, a probabilidade de, pelo menos, um desses três participantes ser engenheiro de *back-end* é $1 - \frac{506}{1785} = \frac{1279}{1785} \approx 0{,}717$.

Assim, a probabilidade pedida, na forma de percentagem e arredondada às décimas, é $71{,}7\%$.

9. Opção (B)

$131\,072 = 2^{17}$

$n = 17$; a linha 17 é constituída por 18 elementos.

O primeiro elemento da linha 17 é 1 e o segundo elemento desta linha é 17.

Recorrendo à calculadora, temos que ${}^{17}C_2 = 136$, ${}^{17}C_3 = 680$, ${}^{17}C_4 = 2380$ e ${}^{17}C_5 = 6188$.

Conclui-se, assim, que os cinco primeiros elementos da linha 17 são inferiores a 5000, e, como, os primeiros cinco elementos são iguais (por ordem inversa) aos últimos cinco, $18 - 5 - 5 = 8$, ou seja, existem oito elementos desta linha que são superiores a 5000.

10. $\frac{{}^{n+2}C_{n-p} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!} = \frac{{}^{n+2}C_{n+2-(n-p)} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!} =$

$= \frac{{}^{n+2}C_{p+2} + {}^{n+2}C_{p+1}}{{}^{n+3}C_{n-p+1}} - \frac{{}^{n+3}A_{n-3} \times 6!}{(n+3)!} =$

$= \frac{{}^{n+3}C_{p+2}}{{}^{n+3}C_{n+3-(n-p+1)}} - \frac{\frac{(n+3)!}{(n+3-(n-3))!} \times 6!}{(n+3)!} =$

$$= \frac{{}^{n+3}C_{p+2}}{{}^{n+3}C_{p+2}} - \frac{\frac{(n+3)!}{6!} \times 6!}{(n+3)!} =$$

$$= 1 - \frac{(n+3)!}{(n+3)!} =$$

$$= 1 - 1 =$$

$$= 0$$

11. Opção (C)

$n \times n = 729 \Leftrightarrow n^2 = 729$

$n > 0$, logo $n = \sqrt{729} = 27$.

A linha seguinte é a 28 e o sexto elemento ocorre para $p = 5$.

Assim, a resposta é ${}^{28}C_5 = 98\,280$.

12. Termo geral do desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, com $x > 0$:

$${}^{n}C_p \left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-p} \left(-\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^p = {}^{n}C_p \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-p} \left(-5 \times x^{-\frac{2}{3}}\right)^p$$

Sobre este desenvolvimento, sabe-se que o sexto termo é o termo independente de x, isto é, o termo de ordem 5 é o termo de grau zero.

Assim, o sexto termo é escrito na forma ${}^{n}C_5 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-5} \left(-5 \times x^{-\frac{2}{3}}\right)^5$.

$${}^{n}C_5 \times \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-5} \times \left(-5 \times x^{-\frac{2}{3}}\right)^5 = {}^{n}C_5 \times x^{\frac{n-5}{3}} \times (-5)^5 \times x^{-\frac{10}{3}} =$$

$$= {}^{n}C_5 \times x^{\frac{n-15}{3}} \times (-5)^5$$

Como o sexto termo é o termo independente, tem-se que:

$\frac{n-15}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 15$

Assim, o termo independente de x é:

${}^{15}C_5 \times x^0 \times (-5)^5 = 3003 \times (-3125) = -9\,384\,375$