

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

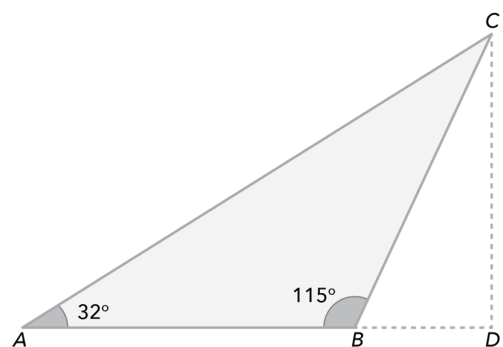
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 18$ cm;
- $\hat{BAC} = 32^\circ$;
- $\hat{CBA} = 115^\circ$;
- $[CD]$ é altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[AB]$;
- a figura não está desenhada à escala.

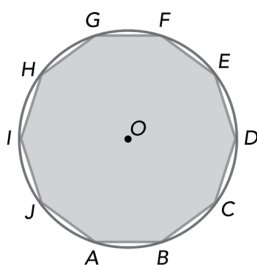


Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Apresente o resultado, em cm^2 , arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere o decágono regular $[ABCDEFGHIJ]$, inscrito numa circunferência de centro O .



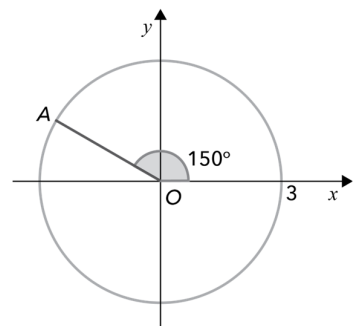
Em qual das seguintes opções se encontra a imagem do ponto B por meio de uma rotação de centro O e ângulo de amplitude -1548° ?

- (A) D (B) E (C) H (D) I

3. Num referencial ortonormado Oxy está representada uma circunferência de raio 3.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- o ângulo que tem como lado origem o semieixo positivo Ox e como lado extremidade a semirreta $\overrightarrow{OA}$ tem amplitude 150° .



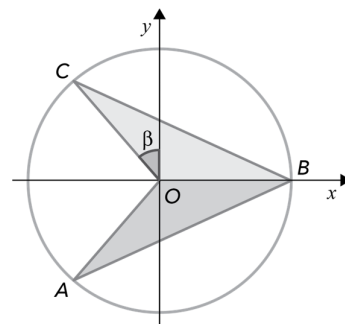
Quais são as coordenadas do transformado do ponto A por uma meia-volta de centro O ?

- (A) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
 (C) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica e o polígono $[OABC]$.

Sabe-se que:

- os vértices A, B e C são pontos da circunferência;
- A e C são simétricos em relação ao eixo das abscissas;
- B tem ordenada nula;
- o ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Oy e por lado extremidade a semirreta OC tem amplitude β ($\beta \in]0^\circ, 90^\circ[$).



Para um determinado valor de β , o polígono $[OABC]$ tem área $\frac{5}{13}$.

Determine, para este valor de β , o valor exato de $\sin \beta$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Considere um ângulo de amplitude α , $\alpha \in]-180^\circ, 180^\circ[$.

Sabe-se que:

- $\sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha > 0$
- $\frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} < 0$

A que quadrante pertence o ângulo de amplitude $\alpha - 60^\circ$?

- (A) Primeiro (B) Segundo (C) Terceiro (D) Quarto

6. Considere $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ tal que $\sin^2 \alpha + \cos(\pi - \alpha) + \frac{1}{9} = 0$.

6.1 Mostre que $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ e que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

6.2 Determine o valor exato de $3 \sin(3\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2 \operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. Considere a função real de variável real f tal que:

$$f(x) = \frac{\sin(2x) + \cos(2x)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$

Qual dos conjuntos seguintes representa o domínio da função f ?

- (A) $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}: x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}: x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}: x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

8. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = (\cos x - 1)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 3 \sin(\pi + \pi x) - 1 + \sin^2(-x)$$

Utilizando processos exclusivamente analíticos, resolva os itens seguintes.

8.1 Mostre que $g(x) = 1 - 2 \sin(\pi x)$.

8.2 Em qual das seguintes opções se encontram os valores de P e de f , correspondentes ao período positivo mínimo e à frequência da função g , respetivamente?

(A) 2 e $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$ e 2

(C) 2π e $\frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{\pi}{2}$ e 2π

9. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

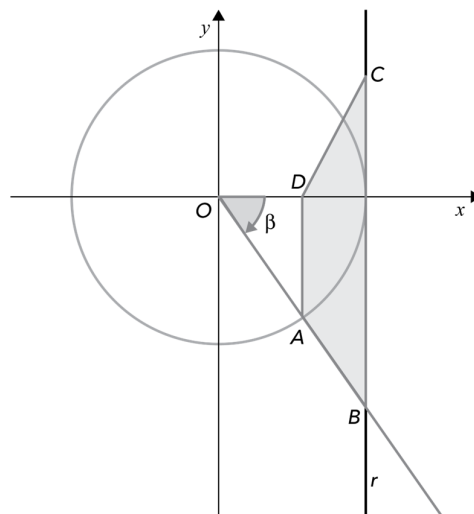
$$f(x) = 3 + 5 \cos\left(5x + \frac{\pi}{7}\right)$$

Prove que, para todo o valor real de x , $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 6$.

10. Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica, o trapézio $[ABCD]$ e a reta r .

Sabe-se que:

- a reta r tem equação $x = 1$;
- o ponto A , situado no quarto quadrante, pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à semirreta $\hat{OA}$;
- os pontos B e C são pontos da reta r ;
- o ponto C tem ordenada simétrica à ordenada do ponto A ;
- o ponto D pertence ao eixo das abcissas;
- a reta AD é paralela ao eixo das ordenadas;
- o ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\hat{OA}$ tem amplitude β ($\beta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$).



10.1 Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, em função de β , é dada por:

$$A(\beta) = -\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{sen} \beta - 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2}$$

10.2 Para um certo valor de β , pertencente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, sabe-se que:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}-\beta\right)-2 \cos (\pi-\beta)=\frac{6}{5}$$

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine o valor exato de $A(\beta)$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.	4.	5.	6.1	6.2	7.	8.1	8.2	9.	10.1	10.2	Total
18	10	10	18	10	20	18	10	20	10	18	20	18	200

Teste N.º 1 de Matemática A • 11.º Ano
Proposta de resolução

1. $D\hat{B}C = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{tg} 65^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \\ \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \overline{CD} = \operatorname{tg} 32^\circ \times \overline{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \overline{CD} = \operatorname{tg} 32^\circ \times (\overline{AB} + \overline{BD}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \overline{CD} = \operatorname{tg} 32^\circ \times (18 + \overline{BD}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \overline{CD} = \operatorname{tg} 32^\circ \times 18 + \operatorname{tg} 32^\circ \times \overline{BD} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} = \operatorname{tg} 32^\circ \times 18 + \operatorname{tg} 32^\circ \times \overline{BD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} - \operatorname{tg} 32^\circ \times \overline{BD} = \operatorname{tg} 32^\circ \times 18 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \overline{BD} \times (\operatorname{tg} 65^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ) = \operatorname{tg} 32^\circ \times 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \overline{BD} \\ \overline{BD} = \frac{\operatorname{tg} 32^\circ \times 18}{\operatorname{tg} 65^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \operatorname{tg} 65^\circ \times \frac{\operatorname{tg} 32^\circ \times 18}{\operatorname{tg} 65^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} \\ \overline{BD} = \frac{\operatorname{tg} 32^\circ \times 18}{\operatorname{tg} 65^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} \end{cases} \end{aligned}$$

$$A_{[ABD]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{18 \times \operatorname{tg} 65^\circ \times \frac{\operatorname{tg} 32^\circ \times 18}{\operatorname{tg} 65^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ}}{2} \approx 143 \text{ cm}^2$$

2. Opção (D)

$$-1548 = -360 \times 4 - 108$$

$$360 \div 10 = 36$$

$$108 \div 36 = 3$$

$$-1548^\circ = -360^\circ \times 4 - 36^\circ \times 3$$

A imagem do ponto B por meio de uma rotação de centro O e ângulo de amplitude -1548° é o ponto I .

3. Opção (B)

O ponto A tem coordenadas $(3 \cos 150^\circ, 3 \sin 150^\circ)$.

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

ou seja, o ponto A tem coordenadas $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, pelo que, as coordenadas do transformado do ponto

A por uma meia-volta de centro O são $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

4. Sabemos que as coordenadas do ponto C são $(\cos(90^\circ + \beta), \sin(90^\circ + \beta))$.

Sabe-se que, para um determinado valor de β , o polígono $[OABC]$ tem área $\frac{5}{13}$, pelo que:

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1 \times \sin(90^\circ + \beta)}{2} &= \frac{5}{13} \Leftrightarrow \sin(90^\circ + \beta) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos \beta = \frac{5}{13} \\ \sin^2 \beta + \cos^2 \beta &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{25}{169} \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{144}{169} \\ &\Leftrightarrow \sin \beta = \pm \frac{12}{13} \end{aligned}$$

Como $\beta \in]0^\circ, 90^\circ[$, então $\sin \beta = \frac{12}{13}$.

5. Opção (C)

$$\sin \alpha \times \operatorname{tg} \alpha > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0$$

Como $\sin^2 \alpha \geq 0, \forall \alpha \in]-180^\circ, 180^\circ[$, podemos concluir que se $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0$, então $\cos \alpha > 0$, o que implica que $\alpha \in]-90^\circ, 90^\circ[$.

Desta forma, e uma vez que $\frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} < 0$, então $1 + \operatorname{tg} \alpha < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha < -1$, o que nos permite concluir que $\alpha \in]-90^\circ, -45^\circ[$ e, portanto, que $-150^\circ < \alpha - 60^\circ < -105^\circ$.

Assim, o ângulo de amplitude $\alpha - 60^\circ$ pertence ao terceiro quadrante.

6.

$$\begin{aligned} \text{6.1 } \sin^2 \alpha + \cos(\pi - \alpha) + \frac{1}{9} &= 0 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{10}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{10}{9}\right)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \frac{7}{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{3} \vee \cos \alpha = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ logo } \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[, \text{ logo } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} 6.2 \quad 3 \operatorname{sen}(3\pi + \alpha) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2 \operatorname{tg}(\alpha - 2\pi) &= 3 \operatorname{sen}(2\pi + \pi + \alpha) + (-\operatorname{sen} \alpha)^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha = \\ &= 3 \operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -3 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -3\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \\ &= \sqrt{5} + \frac{5}{9} - \sqrt{5} = \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

7. Opção (B)

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{x : x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) &= 0 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{sen}(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = -1 \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 8.1 \quad g(x) &= (\cos x - 1)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 3 \operatorname{sen}(\pi + \pi x) - 1 + \operatorname{sen}^2(-x) = \\ &= \cos^2 x - 2 \cos x + 1 - (-\operatorname{sen}(\pi x)) - 2(-\cos x) - 3 \operatorname{sen}(\pi x) - 1 + \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \cos^2 x - 2 \cos x + 1 + \operatorname{sen}(\pi x) + 2 \cos x - 3 \operatorname{sen}(\pi x) - 1 + \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_1 - 2 \cos x + 2 \cos x + \operatorname{sen}(\pi x) - 3 \operatorname{sen}(\pi x) + 1 - 1 = \\ &= 1 + 0 - 2 \operatorname{sen}(\pi x) + 0 = \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}(\pi x) \end{aligned}$$

8.2 Opção (A)

$$P = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

$$f = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= 3 + 5 \cos\left(5\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{7}\right) + \left(3 + 5 \cos\left(5\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{7}\right)\right) = \\
&= 6 + 5 \cos\left(5x - \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) + 5 \cos\left(5x + \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = \\
&= 6 + 5 \cos\left(5x + \frac{\pi}{7} - 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos\left(5x + \frac{\pi}{7} + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= 6 + 5 \cos\left(5x + \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos\left(5x + \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= 6 + 5 \sin\left(5x + \frac{\pi}{7}\right) + \left(-5 \sin\left(5x + \frac{\pi}{7}\right)\right) = \\
&= 6 + 5 \operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{7}\right) - 5 \operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{7}\right) = \\
&= 6
\end{aligned}$$

Daqui se conclui que para todo o valor real de x , $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 6$.

10.

$$10.1 \quad A(\cos \beta, \operatorname{sen} \beta) \quad B(1, \operatorname{tg} \beta) \quad C(1, -\operatorname{sen} \beta) \quad D(\cos \beta, 0)$$

Como $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\cos \beta > 0$ e $\operatorname{sen} \beta < 0$.

$$\overline{AD} = -\operatorname{sen} \beta$$

$$\overline{BC} = -\operatorname{tg} \beta - \operatorname{sen} \beta$$

$$h = 1 - \cos \beta$$

$$\begin{aligned}
A_{[ABCD]} &= \frac{-\operatorname{tg} \beta - \operatorname{sen} \beta + (-\operatorname{sen} \beta)}{2} \times (1 - \cos \beta) = \\
&= \frac{-\operatorname{tg} \beta - 2 \operatorname{sen} \beta}{2} \times (1 - \cos \beta) = \\
&= \frac{-\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \times \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \beta + 2 \operatorname{sen} \beta \times \cos \beta}{2} = \\
&= \frac{-\operatorname{tg} \beta + \operatorname{sen} \beta - 2 \operatorname{sen} \beta + 2 \operatorname{sen} \beta \times \cos \beta}{2} = \\
&= \frac{-\operatorname{tg} \beta - \operatorname{sen} \beta + 2 \operatorname{sen} \beta \times \cos \beta}{2} = \\
&= -\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{sen} \beta - 2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.2 \quad \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} - \beta\right) - 2 \cos(\pi - \beta) &= \frac{6}{5} \Leftrightarrow \cos \beta + 2 \cos \beta = \frac{6}{5} \\
&\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \frac{4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{21}{25}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, então $\operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

Assim :

$$\begin{aligned} A(\beta) &= -\frac{-\frac{\sqrt{21}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{21}}{5} \times \frac{2}{5}\right)}{2} = \\ &= -\frac{-\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{4\sqrt{21}}{25}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{21}}{4} + \frac{\sqrt{21}}{10} - \frac{4\sqrt{21}}{50} = \\ &= \frac{25\sqrt{21}}{100} + \frac{10\sqrt{21}}{100} - \frac{8\sqrt{21}}{100} = \\ &= \frac{27\sqrt{21}}{100} \end{aligned}$$