REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2025

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados, como:

- os gráficos obtidos, em referencial cartesiano, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ menor \times Diagonal\ maior}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ menor + Base\ maior}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

1. Num concurso de aeromodelismo, realizado num terreno plano, o tempo de voo e a altura atingida por cada avião são alguns dos parâmetros avaliados.

Considere a função h definida por

$$h(t) = -0{,}6t^3 + 4{,}7t^2 - 8{,}5t + 6{,}1$$

em que $h(t)$ é a altura, em metros, relativamente ao solo, atingida por um avião do concurso, em cada instante t, em minutos, desde o instante em que o júri iniciou a avaliação do voo do avião até ao instante em que este aterrou no solo.

* **1.1.** Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«O voo avaliado pelo júri durou cerca de _____**I**_____ minutos. Durante esse voo, a altura máxima atingida pelo avião foi cerca de _____**II**_____ metros. No instante em que se iniciou a avaliação, a taxa de variação instantânea da função h é _____**III**_____.»

I	II	III
a) $5{,}6$	**a)** $4{,}1$	**a)** negativa
b) $6{,}1$	**b)** $6{,}1$	**b)** nula
c) $8{,}9$	**c)** $8{,}9$	**c)** positiva

* **1.2.** Determine a taxa média de variação da altura atingida pelo avião entre os 2 e os 4 minutos após o início da avaliação deste voo.

Apresente o valor pedido em metros por minuto.

* **1.3.** Determine os instantes em que a altura atingida pelo avião foi igual a 5 metros, no voo avaliado pelo júri.

Apresente os valores pedidos em minutos, arredondados às centésimas.

2. No âmbito do Plano Nacional de Leitura, têm sido realizados vários estudos sobre os hábitos de leitura e sobre o número de visitas às bibliotecas públicas portuguesas dos residentes em Portugal. Num dos estudos, foram analisados os hábitos de leitura desde o final do século passado até ao início deste século.

Com base em dados recolhidos pelo Instituto Nacional de Estatística, construiu-se a seguinte tabela, em que se apresentam, para os anos indicados, o número de utilizadores registados nas bibliotecas públicas, x , em milhares, e o correspondente número de documentos requisitados, y , também em milhares.

Ano	**N.º de utilizadores registados, em milhares** (x)	**N.º de documentos requisitados, em milhares** (y)
1990	2037	1956
1992	2120	2170
1994	3507	3095
1996	4369	3756
1998	6368	4493
2000	9992	5397
2002	11 893	6380

Fonte: INE, consultado em 26 de setembro de 2024

* **2.1.** Admita válido o modelo de regressão linear de y sobre x , obtido a partir dos dados apresentados na tabela, e admita que, em 1999, existiam 9262 milhares de utilizadores registados nas bibliotecas públicas.

Estime, com base nesse modelo, o número de documentos requisitados nas bibliotecas públicas, em 1999.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x , com quatro casas decimais;

– o valor pedido em milhares, arredondado às unidades.

✱ 2.2. Complete o texto, de acordo com os dados apresentados, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«O número médio de utilizadores registados nas bibliotecas públicas para os anos indicados na tabela é, aproximadamente, ______**I**______ milhares de utilizadores por ano. A mediana do respetivo número de documentos requisitados é ______**II**______ milhares.

O número de utilizadores registados nas bibliotecas públicas em 1990 é cerca de ______**III**______ do número de utilizadores registados nas bibliotecas públicas em 2002.»

I	II	III
a) 3892 **b)** 4369 **c)** 5755	**a)** 1996 **b)** 3756 **c)** 3892	**a)** 6% **b)** 17% **c)** 83%

3. A Figura 1 é uma fotografia de dois reservatórios de água, verticais, instalados no telhado de um edifício.

A Figura 2 é um esquema simplificado de um desses reservatórios, em que se representam um cone reto, um cilindro reto, com 3 m de altura, e uma semiesfera, com 4 m de diâmetro, justapostos, e em que se assinala a altura da superfície da água num dado momento.

A superfície lateral do cone corresponde à cobertura do reservatório.

Admita que a capacidade do reservatório corresponde ao volume total do cilindro e da semiesfera, ou seja, que a parte cónica do reservatório não é ocupada com água.

Figura 1

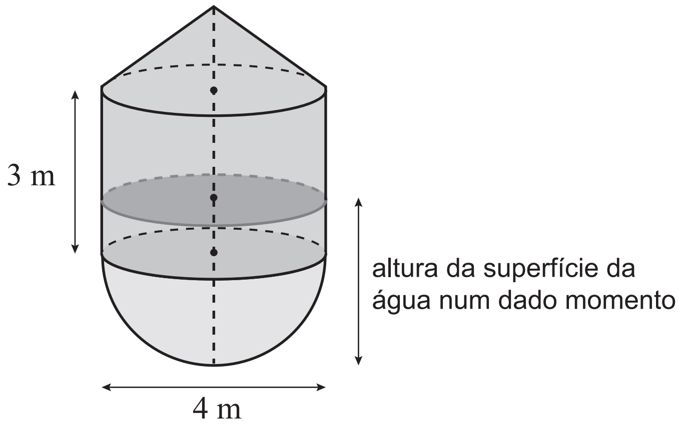


Figura 2

3.1. Determine a altura da superfície da água no reservatório, quando este está a metade da sua capacidade.

Apresente o valor pedido em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

3.2. Na Figura 3, está representado um esquema da superfície lateral do cone correspondente à cobertura do reservatório.

Sabe-se que:

- o ponto V é o vértice do cone;
- o ponto C é o centro da base do cone;
- o ponto A é um ponto da circunferência da base do cone;
- $C\hat{A}V = 31^\circ$.

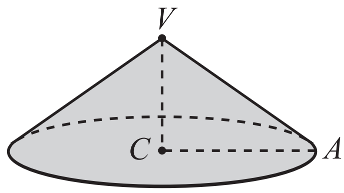


Figura 3

Determine a área da cobertura do reservatório.

Apresente o valor pedido em metros quadrados, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

3.3. Na Figura 4, estão representados, em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, o esquema do reservatório da Figura 2 e os pontos C, centro da base do cone, e V, vértice do cone.

Sabe-se que:

- os pontos C e V pertencem ao semieixo positivo Oz;
- o ponto O é o centro da base do cilindro que está contida no plano xOy.

No referencial, a unidade de comprimento é o metro.

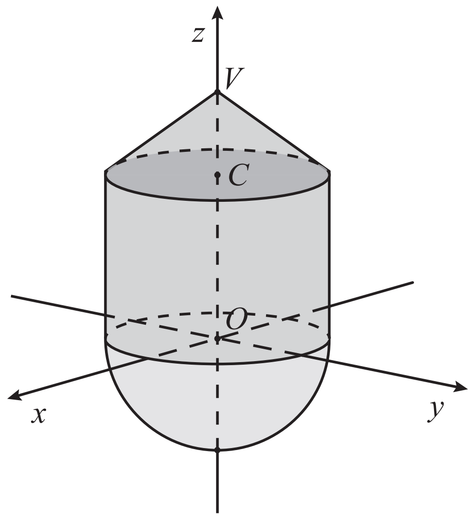


Figura 4

Qual das equações seguintes define o plano que contém a base do cone?

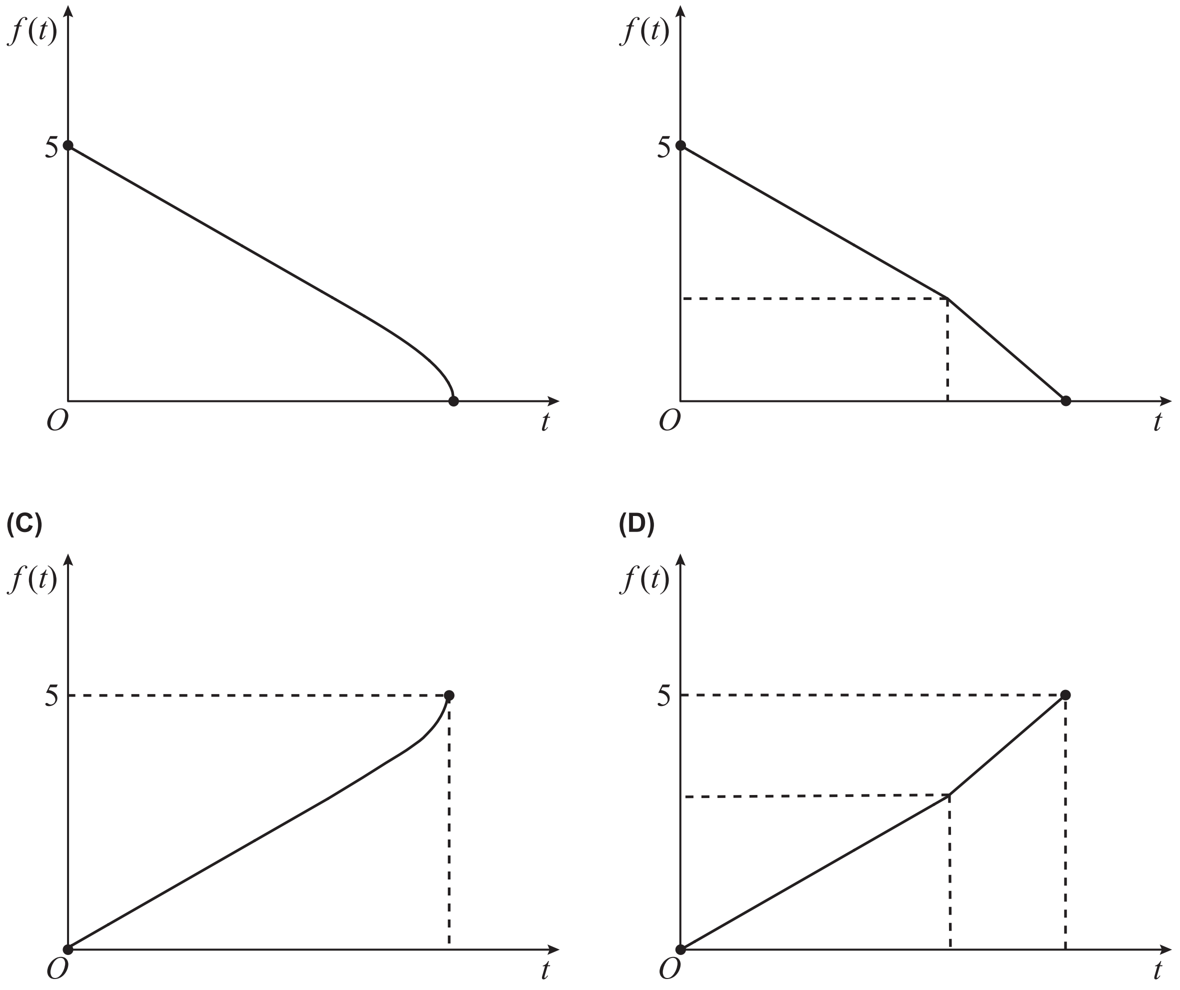
(A) $z = 0$ **(B)** $z = 2$ **(C)** $z = 3$ **(D)** $z = 5$

3.4. Suponha que, num dado instante, o reservatório está cheio e começa a perder água, pelo fundo, com débito constante, até ficar vazio.

Seja f a função que dá a altura da superfície da água no reservatório, em metros, t dias após o instante em que o reservatório começa a perder água.

Qual dos seguintes gráficos é uma representação da função f ?

(A) (B) (C) (D)



4. Num campeonato de jogos matemáticos, participam alunos do ensino secundário com 15, 16 ou 17 anos, oriundos de várias escolas, como, por exemplo, a escola A.

Durante o campeonato, é sorteado um aluno para receber um prémio.

Considere os acontecimentos:

A : «O aluno sorteado é da escola A.»

I : «O aluno sorteado tem 15 anos.»

Na Figura 5, está representado o diagrama de Venn associado à situação descrita. Os valores apresentados no diagrama correspondem às probabilidades dos respetivos acontecimentos.

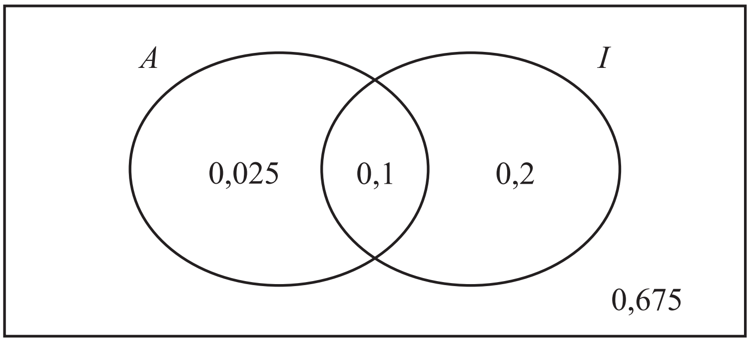


Figura 5

Considere as afirmações seguintes.

I) No campeonato de jogos matemáticos, participa, pelo menos, um aluno da escola A com 15 anos.

II) A probabilidade de o aluno sorteado ter 16 ou 17 anos e ser da escola A é igual à probabilidade de o aluno sorteado ter 15 anos e não ser da escola A.

Justifique que a afirmação **I)** é verdadeira e que a afirmação **II)** é falsa.

Apresente uma razão para cada afirmação.

5. A Figura 6 é uma fotografia da ponte Alexandre III, construída sobre o rio Sena, em Paris. Esta ponte tem uma estrutura em arco que suporta o tabuleiro.

Figura 6

Admita que o nível da água do rio é constante e que a distância, d, em metros, de um ponto da estrutura em arco à superfície da água é dada, em função de x, por

$$d(x) = -0{,}0021x^2 + 0{,}2247x$$

em que x é a distância, em metros, medida na horizontal, da projeção ortogonal do respetivo ponto do arco na superfície da água ao ponto da margem do rio, também na superfície da água, representado por O na Figura 7.

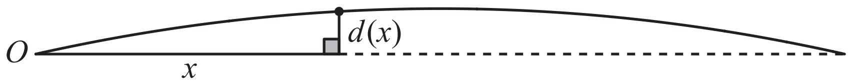


Figura 7

Uma empresa organiza passeios de barco no rio, num percurso que inclui a passagem por baixo da ponte Alexandre III.

Admita que a altura máxima permitida para as embarcações é de $3{,}2$ metros acima da superfície da água e que a empresa irá colocar bóias fixas no rio, formando um canal de passagem, para que, nesse canal, todas as embarcações passem sem embater na ponte.

Determine a largura máxima do canal de passagem formado pelas bóias fixas no rio.

Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados com quatro casas decimais.

6. A Figura 8 é uma fotografia de duas facas de vindima de origem romana, provenientes do Alentejo, e a Figura 9 é um esquema de uma vista simplificada de uma dessas facas.

Figura 8

Nesse esquema, que não está à escala, estão assinalados os pontos A , B , C , D e E , tais que:

- os arcos AB e AC são semicircunferências;
- o ponto B pertence ao segmento de reta $[AC]$;
- $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AC}$;
- $[BCDE]$ é um quadrado.

Admita que $\overline{AC} = 18\ \text{cm}$.

Determine o perímetro da vista simplificada da faca representada na Figura 9.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

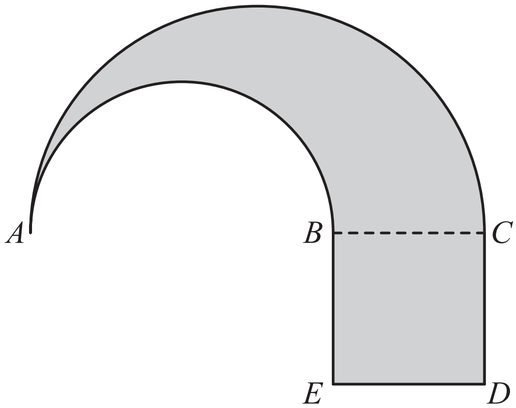


Figura 9

7. Um banco disponibiliza uma solução de poupança com as características seguintes:

- depósito com um prazo de 8 anos;
- taxa de juro anual de $1{,}2\ \%$, na modalidade de juro composto, ou seja, no final do primeiro ano é acrescentado ao capital inicial $1{,}2\ \%$ desse capital e, no final de cada ano, a partir daí, é acrescentado ao capital acumulado até esse ano $1{,}2\ \%$ desse capital acumulado.

Determine o capital final acumulado num depósito, de acordo com esta solução de poupança, se o capital inicial aplicado for 3000 euros.

Apresente o valor pedido em euros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve quatro casas decimais.

8. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$. Fixada uma unidade de medida, tem-se $\overline{AB} = 1$.

Na Figura 10, está representada uma construção com quatro triângulos equiláteros, que começou a ser elaborada a partir do triângulo $[ABC]$. O segundo triângulo desta construção obteve-se unindo os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, o terceiro triângulo obteve-se unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, e o quarto triângulo obteve-se, de modo semelhante, a partir do terceiro.

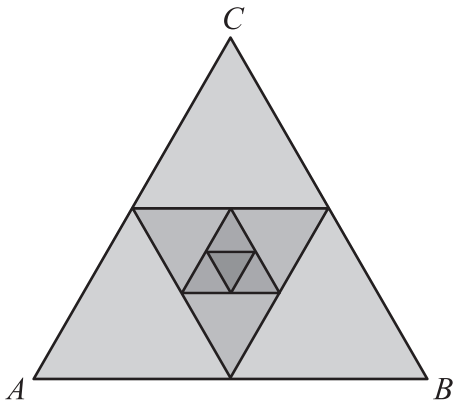


Figura 10

Admita que se continua esta construção, do modo acima descrito, até se obter o décimo triângulo.

Determine o perímetro do décimo triângulo.

Apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4.**	**4.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	18	18	18	14	18	18	14	14	18	**164**
Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**							**Subtotal**
Cotação (em pontos)	2 × 18 pontos										**36**
TOTAL											**200**