

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2025

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação

12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. 12 pontos
(C)

2. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

Designemos por r a razão da progressão (a_n) .

1.º Processo

Reconhecer que $a_4 = a_1 + 3r$ e que $a_{10} = a_1 + 9r$ 2 pontos

Obter $a_{10} - a_4 = 6r$ 1 ponto

Obter o valor de $r \left(\frac{1}{2}\right)$ 2 pontos

Escrever $\left(a_1 + \frac{3}{2}\right)\left(a_1 + \frac{9}{2}\right) = 40$ (ou equivalente) 1 ponto

Obter o valor de $a_1 \left(\frac{7}{2}\right)$ 2 pontos

Obter $a_n = \frac{1}{2}n + 3$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $a_n = 173$ 2 pontos

Obter o pedido (340) 2 pontos

2.º Processo

Reconhecer que $r = \frac{a_{10} - a_4}{10 - 4}$ 3 pontos

Obter o valor de $r \left(\frac{1}{2}\right)$ 2 pontos

Escrever $a_4(a_4 + 3) = 40$ (ou equivalente) 1 ponto

Obter o valor de a_4 (5) 2 pontos

Obter $a_n = \frac{1}{2}n + 3$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $a_n = 173$ 2 pontos

Obter o pedido (340) 2 pontos

3.º Processo

Escrever $a_4(a_4 + 3) = 40$	1 ponto
Obter o valor de a_4 (5)	2 pontos
Reconhecer que $a_{10} = a_4 + 6r$	3 pontos
Obter o valor de r $\left(\frac{1}{2}\right)$	2 pontos
Obter $a_n = \frac{1}{2}n + 3$ (ou equivalente)	2 pontos
Escrever $a_n = 173$	2 pontos
Obter o pedido (340)	2 pontos

3.1. 14 pontos

Determinar $f'(x)$ (ver nota 1)	3 pontos
Escrever $f'(x) = 0$	1 ponto
Determinar o zero de f' $\left(-\frac{1}{2}\right)$	2 pontos
Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .	5 pontos
Apresentar os intervalos de monotonia da função f (ver nota 2)	2 pontos
Apresentar o valor de x para o qual a função f tem extremo relativo $\left(-\frac{1}{2}\right)$.	1 ponto

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função f , a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se for apresentado o intervalo $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, em vez de $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, e o intervalo $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$, em vez de $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

3.2. 14 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ 4 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3 + \ln(1-x)^3}{x-1}$ 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 3 + \ln(1-x)^3) = -\infty$ 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0^-$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3 + \ln(1-x)^3}{x-1} = +\infty$ 1 ponto

Concluir que a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função g 1 ponto

Justificar a inexistência de outras assíntotas verticais ao gráfico da função g .. 1 ponto

Determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ 7 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3 + \ln(1-x)^3}{x-1}$ 1 ponto

Reconhecer que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3 + \ln(1-x)^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x-1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)^3}{x-1}$.. 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x-1} = 2$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)^3}{x-1} \underset{y=1-x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^3}{-y}$ 2 pontos

Escrever $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y^3}{-y} = -3 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}$ 1 ponto

Obter $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3 + \ln(1-x)^3}{x-1} = 2$ 1 ponto

Concluir que a reta de equação $y = 2$ é a assíntota horizontal ao gráfico da função g 1 ponto

3.3. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Referir que f é contínua em $[-6, -5]$ (ver notas 1 e 2)	4 pontos
Determinar $f(-6)$	2 pontos
Determinar $f(-5)$	2 pontos
Determinar $g(0)$ (-3)	2 pontos
Referir que $f(-6) < g(0) < f(-5)$ (ou equivalente)	2 pontos
Referir que o pretendido resulta da aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy (ver nota 3)	2 pontos

2.º Processo

Considerar a função h definida por $h(x) = f(x) - g(0)$	2 pontos
Referir que h é contínua em $[-6, -5]$ (ver notas 1 e 2)	4 pontos
Determinar $h(-6)$	2 pontos
Determinar $h(-5)$	2 pontos
Referir que $h(-6) \times h(-5) < 0$ (ou equivalente)	2 pontos
Referir que o pretendido resulta da aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy (ver nota 3)	2 pontos

Notas:

1. Se apenas for referido que a função é contínua, esta etapa deve ser considerada cumprida.
2. Se for referido que a função é contínua em $] -6, -5[$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.
3. A atribuição de 0 pontos na primeira etapa do 1.º processo ou na segunda etapa do 2.º processo implica a atribuição de 0 pontos a esta etapa.

4. 14 pontos

Designemos por d a abcissa do ponto D .

Reconhecer que as coordenadas dos pontos B , C e D são, respetivamente, $(15, 8)$, $(0, 8)$ e $(d, 0)$	3 pontos
Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DC}$ em função de d $((-d, 8))$	2 pontos
Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DB}$ em função de d $((15-d, 8))$	2 pontos
Obter $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = -d(15-d) + 8 \times 8$ (ou equivalente)	3 pontos
Escrever $d^2 - 15d + 64 = 50$ (ou equivalente)	1 ponto
Resolver a equação $d^2 - 15d + 14 = 0$	1 ponto
Reconhecer que $d = 1$	1 ponto
Obter o pedido $((1, 0))$	1 ponto

5. 12 pontos

I → a) II → b) III → c) IV → b)

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

6.1. 12 pontos

(A)

6.2. 14 pontos

- Reconhecer que a reta EF é perpendicular ao plano CDE 1 ponto
- Reconhecer o vetor de coordenadas $(0, 5, 2)$ como vetor diretor da reta EF . 1 ponto
- Escrever uma equação vetorial da reta EF
 $((x, y, z) = (-9, 0, 2) + k(0, 5, 2), k \in \mathbb{R})$ 2 pontos
- Reconhecer que as coordenadas do ponto E são da forma
 $(-9, 5k, 2 + 2k)$ 1 ponto
- Escrever $5 \times 5k + 2(2 + 2k) - 62 = 0$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter o valor de k (2) 1 ponto
- Determinar as coordenadas do ponto E $(-9, 10, 6)$ 1 ponto
- Determinar $\overline{EF}$ $(\sqrt{116})$ 2 pontos
- Reconhecer que $\overline{AF} = 12$ 2 pontos
- Obter o valor pedido (1392) 1 ponto

7. 14 pontos

- Apresentar uma condição que traduza o problema $(C(t) > 15, \text{ ou equivalente})$
(ver nota 1) 4 pontos
- Representar, em referencial cartesiano, o gráfico da função C e a reta
de equação $y = 15$ (ou equivalente) **(ver notas 2 e 3)** 4 pontos
- Assinalar os pontos relevantes para a resolução do problema 1 ponto
- Obter as abcissas desses pontos (0,166 e 10,600) 2 pontos
- Determinar a amplitude do intervalo (10,434) 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (10 h 26 min) 1 ponto

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer condição, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que este corresponde à condição que traduz corretamente o problema. Se for apresentada a equação $C(t) = 15$, em vez de $C(t) > 15$, sendo inequívoco que há a intenção de resolver a condição $C(t) > 15$, esta etapa deve ser considerada cumprida.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

8.1. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por n o número de alunos presentes na assembleia da escola, por A o acontecimento «O aluno frequenta Matemática A» e por B o acontecimento «O aluno é do 12.º ano».

1.º Processo

- Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{9}{11}$ 3 pontos
- Reconhecer que $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ 2 pontos
- Reconhecer que $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ 2 pontos
- Obter $P(A \cap B) = \frac{2}{11}$ 2 pontos
- Reconhecer que $P(A \cap B) = \frac{10}{n}$ 3 pontos
- Escrever $\frac{10}{n} = \frac{2}{11}$ (ou equivalente) 1 ponto
- Obter o valor pedido (55) 1 ponto

2.º Processo

- Escrever $P(A|B) = \frac{10}{25}$ 2 pontos
- Escrever $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{9}{11}$ 3 pontos
- Reconhecer que $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$ 2 pontos
- Reconhecer que $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ 2 pontos
- Obter $P(A \cap B) = \frac{2}{11}$ 2 pontos
- Reconhecer que $P(B) = \frac{25}{n}$ 1 ponto
- Escrever $\frac{\frac{2}{11}}{\frac{25}{n}} = \frac{2}{5}$ (ou equivalente) 1 ponto
- Obter o valor pedido (55) 1 ponto

8.2. 12 pontos

(C)

9. 14 pontos

Designemos por F o acontecimento «O aluno frequenta Filosofia» e por E o acontecimento «O aluno frequenta Economia A».

Reconhecer que $P(F) = 2P(E)$	1 ponto
Reconhecer que $P(F \cup E) = 3P(F \cap E)$	2 pontos
Identificar o pedido com $P(\overline{E} F)$	2 pontos
Escrever $P(F) + P(E) - P(F \cap E) = 3P(F \cap E)$ (ou equivalente)	1 ponto
Obter $P(F \cap E) = \frac{3}{8}P(F)$ (ou equivalente)	2 pontos
Reconhecer que $P(\overline{E} \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$	1 ponto
Obter $P(\overline{E} \cap F) = \frac{5}{8}P(F)$	2 pontos
Escrever $P(\overline{E} F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)}$	1 ponto
Obter o valor pedido $\left(\frac{5}{8}\right)$	2 pontos

10. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $f(x) = g(x)$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter $\sin x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$ (ou equivalente)	2 pontos
Reconhecer que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	1 ponto
Obter $\sin x = 0 \vee \cos(2x) = 0$	2 pontos
Obter $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$	4 pontos
Determinar a ordenada dos pontos de intersecção $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ ou equivalente}\right)$	2 pontos
Apresentar o pedido $\left(\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ e } \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$	1 ponto

2.º Processo

Escrever $f(x) = g(x)$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter $\sin x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$ (ou equivalente)	2 pontos
Reconhecer que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ (ou $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)	1 ponto
Obter $\sin x = 0 \vee \cos^2 x = \frac{1}{2}$ (ou $\sin x = 0 \vee \sin^2 x = \frac{1}{2}$)	2 pontos
Obter $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}$	4 pontos
Determinar a ordenada dos pontos de intersecção $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ ou equivalente}\right)$	2 pontos
Apresentar o pedido $\left(\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ e } \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$	1 ponto

11. 14 pontos

Tópicos de resposta

- Justificação da falsidade da proposição I.

Exemplo: Como $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$, conclui-se que f'' não muda de sinal em $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right]$, pelo que o ponto de abcissa $x = 3$ não pode ser um ponto de inflexão de f .

- Justificação da falsidade da proposição II.

Exemplo: Como $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{4}$, conclui-se que $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$. Portanto, a função f' é decrescente em $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right[$, pelo que $f'(-2) > f'(-1)$ (ou $f'(-2) \geq f'(-1)$), ou seja, o declive da reta r não é menor do que o declive da reta s .

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

12.1. 12 pontos

(D)

12.2. 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $z^3 = \frac{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-i}$ 2 pontos

Obter $1-i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ 2 pontos

Obter $z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ 3 pontos

Escrever $z = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$ 2 pontos

Obter $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 3 pontos

Obter $w = -\sqrt{3} + i$ 2 pontos

2.º Processo

Escrever $z^3 = \frac{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{1-i}$	2 pontos
Obter $8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 8 + 8i$	1 ponto
Obter $z^3 = 8i$	2 pontos
Reconhecer que $z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$	2 pontos
Escrever $z = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$	2 pontos
Obter $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	3 pontos
Obter $w = -\sqrt{3} + i$	2 pontos

13. 14 pontos

Determinar $g''(x)$	4 pontos
Obter $g'(x) = 2f(x) \times f'(x)$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter $g''(x) = 2[f'(x)]^2 + 2f''(x) \times f(x)$ (ou equivalente)	2 pontos
Justificar que, para qualquer número real x , $g''(x) > 0$	8 pontos
Referir que, para qualquer número real x , $f(x) > 0$	1 ponto
Justificar que, para qualquer número real x , $f''(x) \geq 0$	3 pontos
Concluir que, para qualquer número real x , $f''(x) \times f(x) \geq 0$	1 ponto
Reconhecer que, para qualquer número real x , $[f'(x)]^2 > 0$	2 pontos
Concluir que, para qualquer número real x , $g''(x) > 0$	1 ponto
Concluir que o gráfico da função g tem concavidade voltada para cima	2 pontos

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	3.1.	3.2.	5.	6.1.	6.2.	7.	8.1.	8.2.	11.	12.1.	13.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	12	14	14	14	12	14	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	3.3.	4.	9.	10.	12.2.	Subtotal						
Cotação (em pontos)	3 x 14 pontos												42
TOTAL													200