

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2025

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

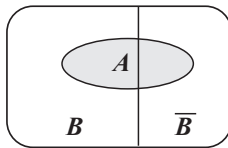
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

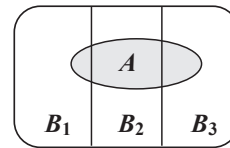
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

As plataformas de Inteligência Artificial (IA) estão cada vez mais presentes no nosso cotidiano, oferecendo uma grande diversidade de recursos.

1. Na escola de Avelares, realizou-se um estudo, junto dos seus 580 alunos, com o intuito de saber qual a plataforma de IA que preferiam, de entre as plataformas *ArtificialThings* (A), *BeArtificial* (B), *CallArtificial* (C) e *DoArtificial* (D).

Ao votar, cada aluno devia preencher um boletim, no qual ordenaria as quatro plataformas, A, B, C e D, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma certa ordenação corresponde a 1 voto.

Terminada a votação, verificou-se que foram apurados 406 votos validamente expressos e que, além disso, foram registados 29 votos em branco ou nulos.

* 1.1. Qual foi a taxa de abstenção neste ato eleitoral?

- (A) 5%
- (B) 25%
- (C) 30%
- (D) 35%

* 1.2. Na Tabela 1, encontram-se organizados os resultados desta votação.

Tabela 1

Votos Preferências				
	146	128	67	65
1. ^a	A	B	B	A
2. ^a	B	A	D	B
3. ^a	C	C	A	D
4. ^a	D	D	C	C

A plataforma de IA que reúne a preferência da maioria dos alunos foi apurada através da aplicação do método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada uma das plataformas, em função do seu lugar na ordem de preferências.

Cada plataforma recebe:

- quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
- três pontos por cada voto na segunda preferência;
- dois pontos por cada voto na terceira preferência;
- um ponto por cada voto na quarta preferência.

- Contabiliza-se a pontuação total de cada uma das plataformas, e a mais pontuada é considerada a plataforma preferida pelos alunos da escola.
- Em caso de empate, a tabela de preferências é reestruturada, contemplando-se, em cada coluna, apenas as plataformas empatadas, que ocuparão a primeira e a segunda preferências, mantendo-se a mesma ordem. A plataforma preferida pelos alunos da escola é a que obtiver maior número de votos na primeira preferência.

Mostre que a plataforma preferida pelos alunos da escola, por aplicação do método descrito, não foi a que obteve maior número de votos na primeira preferência.

Na sua resposta, apresente:

- a pontuação total obtida por cada plataforma, por aplicação do método descrito;
- o número de votos obtido por cada plataforma na primeira preferência.

*** 2.** Na escola de Avelares, um grupo de alunos ficou responsável pela supervisão de uma exposição.

O horário de funcionamento da exposição foi dividido em blocos horários, B1, B2, B3, ... , com duração variada.

Ficou estabelecido que:

- em cada um dos blocos horários, seria suficiente a presença de um aluno;
- um aluno poderia assegurar mais do que um bloco horário;
- um bloco horário poderia ser repartido por dois alunos.

A Joana e a Rita, duas alunas do grupo, ficaram responsáveis pelos blocos B1, B2 e B3. Para dividirem os três blocos, de um modo que ambas considerassem justo, resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada uma das alunas atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos três blocos, num total de 100 pontos.
- Cada bloco é destinado, temporariamente, à aluna que mais o valoriza.
- Determina-se, para cada uma das alunas, o total temporário de pontos do(s) bloco(s) que lhe foram temporariamente destinado(s).
- Se o total temporário de pontos for igual, a partilha está concluída. Caso contrário, procede-se ao ajuste da partilha, de modo que o número total de pontos das duas alunas passe a ser igual, através da partilha de um dos blocos.
- Para se efetuar o ajuste da partilha, o bloco a repartir pelas alunas será um dos blocos temporariamente destinados à aluna que obteve um total temporário de pontos mais elevado. No caso de haver mais de um bloco, dever-se-á repartir aquele cuja diferença de pontos atribuídos pelas alunas seja menor.

Seja A a aluna cujo total temporário de pontos é mais elevado, e seja B a outra aluna.

- O total final de pontos a atribuir à aluna A corresponde à diferença entre o total temporário dos pontos dos seus blocos e x por cento dos pontos por ela atribuídos ao bloco a repartir.
- O total final de pontos a atribuir à aluna B corresponde à soma do total temporário dos pontos dos seus blocos com x por cento dos pontos por ela atribuídos ao bloco a repartir.
- Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x , com o qual a partilha ficará equilibrada.
- A aluna B fica com o(s) bloco(s) a si destinado(s) e x por cento do bloco a repartir, e a aluna A fica com o restante.

Na Tabela 2, apresenta-se o número de pontos atribuídos a cada um dos blocos pelas duas alunas.

Tabela 2

	B1	B2	B3
Joana	44	33	23
Rita	46	40	14

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O bloco horário mais valorizado pela Joana e pela Rita foi o bloco ____ **I** ____ . O total de pontos do(s) bloco(s) horário(s) temporariamente destinado(s) à Rita foi ____ **II** ____ . Depois da partilha concluída, o bloco horário ____ **III** ____ foi repartido entre as duas alunas, ficando a Joana com a responsabilidade de assegurar ____ **IV** ____ do mesmo.

I	II	III	IV
a) B1	a) 46	a) B1	a) 30%
b) B2	b) 70	b) B2	b) 55%
c) B3	c) 86	c) B3	c) 70%

- * 3. O João quer subscrever o serviço *Premium* de uma plataforma de IA, durante um período de 18 meses, e está indeciso entre a plataforma A e a plataforma B. De modo a selecionar a opção mais económica, determinou o custo de diversas alternativas: subscrever apenas a plataforma A ou apenas a plataforma B, durante 18 meses; ou subscrever ambas as plataformas, em períodos de tempo diferentes, perfazendo, no total, 18 meses.

Na Tabela 3, apresenta-se o preço do serviço *Premium* de cada uma das duas plataformas de IA, em função do tempo de subscrição.

Tabela 3

Plataforma A
O valor total a pagar pelo período de subscrição, em euros, tem em conta que: – a taxa de subscrição, independentemente da duração do contrato, é 5 euros; – o preço por trimestre é 8 euros. Só é possível subscrever esta plataforma por períodos trimestrais.
Plataforma B
O valor total a pagar pelo período de subscrição, em euros, é obtido arredondando às unidades o valor que é dado pela expressão: $V(t) = 30 - 22 \times e^{-0,2t}$ em que t é o número de meses contratados, que pode variar entre 1 e 12. Para períodos de subscrição inferiores ou iguais a 12 meses, realiza-se uma única subscrição do número de meses pretendido. Para períodos de subscrição superiores a 12 meses, realizam-se várias subscrições, podendo apenas o número de meses contratados ser inferior a 12 na última subscrição. O valor a pagar é igual à soma dos valores das várias subscrições.

Complete o texto seguinte, seleccionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, seleccionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Se o João subscrever apenas a plataforma A para os 18 meses, o valor a pagar será **I** euros. Se subscrever apenas a plataforma B para os 18 meses, fazendo para isso duas subscrições, terá de pagar **II** euros.

Admita que o João opta por subscrever ambas as plataformas, subscrevendo cada uma delas uma única vez. Se subscrever a plataforma A por três trimestres e a plataforma B pelo tempo restante, terá de pagar **III** euros.

O João concluiu que a solução mais económica passa por subscrever uma das plataformas durante 12 meses e, nos restantes meses, subcrever a outra, tendo de pagar um total de **IV** euros pelas subscrições nas duas plataformas.

I	II	III	IV
a) 48 b) 50 c) 53	a) 28 b) 39 c) 51	a) 50 b) 55 c) 60	a) 39 b) 49 c) 59

4. Uma empresa pretende instalar cabo de fibra ótica para interligar seis departamentos: D1, D2, D3, D4, D5 e D6.

Na Tabela 4, encontram-se registadas as distâncias mínimas, em metros, que serviram de base para o projeto de instalação do cabo de fibra ótica entre os departamentos.

Tabela 4

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
D1		136	190			80
D2	136			146	160	54
D3	190			140		51
D4		146	140		43	145
D5		160		43		
D6	80	54	51	145		

De modo a minimizar o custo da instalação do cabo de fibra ótica, aplicou-se o método a seguir descrito.

- Escolhe-se, ao acaso, um dos seis departamentos e seleciona-se a menor das distâncias entre esse departamento e os restantes.
Ficam assim escolhidos dois departamentos.
- Seleciona-se a menor das distâncias entre qualquer um dos dois departamentos escolhidos e um departamento ainda não escolhido.
- Seleciona-se a menor das distâncias entre qualquer um dos departamentos escolhidos e um departamento ainda não escolhido.
- Repete-se o ponto anterior até todos os departamentos terem sido selecionados.

Determine o comprimento mínimo, em metros, de cabo de fibra ótica que é necessário instalar.

Na sua resposta, apresente um grafo que resulte da aplicação do método descrito e que permita identificar as distâncias selecionadas.

5. Duas plataformas de IA, a *ArtificialThings* e a *BeArtificial*, monitorizam o número de utilizadores em Avelares.

De 1 de janeiro de 2023 até 1 de junho de 2024, o número aproximado de utilizadores das duas plataformas, *ArtificialThings* e *BeArtificial*, em centenas, em Avelares, é dado, respetivamente, pelas expressões

$$A(t) = 2 e^{0,18t} \quad \text{e} \quad B(t) = 3 e^{0,12t}$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2023.

* 5.1. Em qual dos intervalos de tempo foi mais acentuado o crescimento do número de utilizadores da *ArtificialThings* em Avelares, no ano de 2023?

- (A) De 1 de abril a 1 de maio.
- (B) De 1 de maio a 1 de junho.
- (C) De 1 de junho a 1 de julho.
- (D) De 1 de julho a 1 de agosto.

5.2. Determine quantos dias foram necessários para que o número de utilizadores da *ArtificialThings* em Avelares passasse de 700 para 1350 utilizadores.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Admita que cada mês tem 30 dias.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

* 5.3. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O número de utilizadores da *BeArtificial* em Avelares ____ I ____ no intervalo de tempo considerado, sendo, no início do ano de 2023, igual a ____ II ____ centenas. O número de utilizadores das duas plataformas foi igual num determinado momento do mês de ____ III ____ . No início do ano de 2024, a diferença entre o número de utilizadores das duas plataformas situava-se entre ____ IV ____ utilizadores.

I	II	III	IV
a) aumentou	a) 2	a) junho	a) 200 e 299
b) manteve-se	b) 3	b) julho	b) 300 e 399
c) diminuiu	c) 4	c) agosto	c) 400 e 499

6. Durante a realização de um estudo estatístico, os participantes nesse estudo foram divididos em grupos. Nos diagramas de caule-e-folhas apresentados na Figura 1, estão registradas as idades, em anos, dos participantes integrados no Grupo A e no Grupo B. Nos diagramas, o algarismo das dezenas de cada registo é apresentado no caule, e o algarismo das unidades é apresentado nas folhas.

Grupo A		Grupo B
7 7 5 5	1	7
9 5 5 3 0 0	2	0 0 0 5 5 9
	3	2 2 4 4 4

Figura 1

- * 6.1. Considere apenas os participantes integrados no Grupo A.

Quantos têm idade pertencente ao intervalo $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$?

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9

- * 6.2. Construa um diagrama de extremos e quartis que traduza os dados referentes à idade, em anos, dos 22 participantes integrados no Grupo A e no Grupo B.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades da sua calculadora e apresente a(s) lista(s) utilizada(s).

- * 7. As plataformas de IA são utilizadas como ferramenta de trabalho para a realização de diversas tarefas. A um conjunto de pessoas foi proposta a realização de uma tarefa, durante a qual poderiam aceder a plataformas de IA. Concluída a tarefa, registou-se o número de vezes, V , que cada uma das pessoas acedeu a plataformas de IA. Os dados recolhidos foram, posteriormente, agrupados nas classes $[0, 5[$, $[5, 10[$, ..., $[25, 30[$.

Na Tabela 5, estão parcialmente registados esses dados.

Tabela 5

V	n_i	N_i	fr_i	Fr_i
$[0, 5[$	3			0,02
$[5, 10[$	12	p		
$[10, 15[$	3		q	
$[15, 20[$				0,94
$[20, 25[$	r			
$[25, 30[$	3			1

Legenda:

n_i – frequência absoluta simples

N_i – frequência absoluta acumulada

fr_i – frequência relativa simples

Fr_i – frequência relativa acumulada

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O valor de p é I, o valor de q é II e o valor de r é III. No total, integraram este estudo IV pessoas.

I	II	III	IV
a) 9	a) 0,02	a) 3	a) 147
b) 12	b) 0,03	b) 6	b) 150
c) 15	c) 0,04	c) 9	c) 153

8. O José utiliza diversas plataformas de IA como ferramenta de trabalho.

8.1. Admita que, quando o José realiza trabalhos de investigação, em 20% dos casos recorre a plataformas de IA, sendo a utilização de IA em cada trabalho independente do sucedido nos trabalhos anteriores.

Considere que o José realizou quatro trabalhos de investigação.

Determine a probabilidade de o José recorrer a plataformas de IA em exatamente três desses quatro trabalhos.

* 8.2. Uma das plataformas que o José utiliza é a *EIseIntelligence*, à qual acede em 10% das vezes em que recorre a uma plataforma de IA.

Depois de uma análise às respostas dadas pelas diferentes plataformas de IA às perguntas formuladas, foi possível apurar que:

- se a plataforma usada for a *EIseIntelligence*, a resposta está correta em 90% dos casos;
- se a plataforma usada for outra que não a *EIseIntelligence*, a resposta está correta em 95% dos casos.

O José formulou uma pergunta numa plataforma de IA, e a resposta obtida estava correta.

Determine a probabilidade de o José ter formulado a pergunta na plataforma *EIseIntelligence*.

Apresente a resposta na forma de fração irredutível.

9. Uma aluna que utiliza regularmente a plataforma *ArtificialThings* leu num artigo de jornal que a proporção de respostas incorretas dadas às perguntas formuladas nessa plataforma era de 30%.

Com vista a analisar a veracidade da afirmação, a aluna pediu a 250 utilizadores da plataforma de IA, escolhidos de forma aleatória, que formulassem uma questão nessa plataforma e posteriormente confirmassem a veracidade da resposta recebida. Destes, 50 confirmaram que a resposta à sua questão estava incorreta. Depois, construiu um intervalo de confiança a 99% para a proporção de respostas incorretas.

Haverá ou não razão para a aluna duvidar da publicação do jornal? Conclua, construindo um intervalo de confiança nas mesmas condições do que foi construído pela aluna.

Na sua resposta, apresente os extremos do intervalo de confiança arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	2.	3.	5.1.	5.3.	6.1.	6.2.	7.	8.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	15	19	15	15	15	15	15	19	15	19	162
Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.		5.2.			8.1.		9.		Subtotal	
Cotação (em pontos)	2 x 19 pontos										38
TOTAL											200