FICHA DE APOIO DE MATEMÁTICA A

10º ano

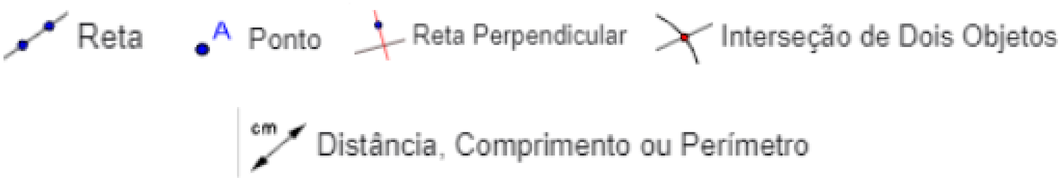
Tema(s): .Geometria Dinâmica -

Tarefa 1

Explorar (n)o GeoGebra

1. Determina a distância de um ponto a uma reta à qual ele não pertença.

Nota: Começa por construir os objetos geométricos (reta e ponto). Lembra-te que a distância é a medida do comprimento do menor segmento cujos extremos são um ponto da reta e o ponto exterior à reta e que isso acontece se esse segmento de reta for perpendicular à reta. Podes então continuar a construção para obteres a distância pretendida.



2. Constrói o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente de dois pontos dados.

Nota: Começa por colocar dois pontos A e B na folha geométrica, os quais definem um segmento de reta (são os extremos desse segmento de reta).

Constrói depois o ponto médio do segmento de reta, o qual, por definição, dista igualmente de A e de B (diz-se equidistante de A e de B).

Coloca outro ponto no plano e determina as distâncias a A e a B. Move depois o ponto para um local em que estas medidas fiquem iguais.

Onde deves colocar um terceiro ponto que seja equidistante de A e de B?

Qual é o conjunto de todos os pontos que estão à mesma distância de A e de B?

Desenha-o!

3. Constrói um ângulo e mede a sua amplitude, em graus.

Nota: Começa por construir duas semirretas com a mesma origem de modo a definirem um ângulo convexo e um ângulo côncavo (as semirretas são lados dos ângulos). Mede depois cada um dos ângulos.

4. Constrói o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo.

Nota: Utiliza o ângulo convexo construído aquando da resolução da questão anterior e coloca um ponto no seu interior.

Determina a distância a cada uma das semirretas (recorda o que fizeste para dar resposta à questão 1) e depois move-o para um local onde essas distâncias sejam iguais.

Onde deves colocar outro ponto de modo a que ele seja também equidistante das semirretas?

Qual é o conjunto de todos os pontos que estão à mesma distância dos lados do ângulo?

Tarefa 2

À mesma distância dos vértices

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

2. Desenha uma circunferência usando a ferramenta “Circunferência dado o centro e um ponto”. Ajusta o centro e o ponto de modo que a circunferência esteja circunscrita ao triângulo.

3. Para tentar saber como encontrar o centro da circunferência, a partir do triângulo, traça os segmentos de reta que unem o centro da circunferência aos vértices do triângulo.

Que regularidades encontras sobre esses segmentos de reta? [Observa em particular os seus comprimentos]

4. Constrói o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois dos vértices do triângulo.

Repete a construção anterior para outros dois vértices do triângulo.

5. Justifica que o centro se encontra nas mediatrizes dos lados do triângulo.

6. Apagando a circunferência, e deixando o triângulo, como procederias para encontrar, de forma rigorosa, o centro da circunferência circunscrita?

7. Constrói a circunferência circunscrita ao triângulo.

O ponto encontrado é designado por **circuncentr**o e é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Tarefa 3

À mesma distância dos lados

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

2. Desenha uma circunferência usando a ferramenta "Circunferência dado o centro e um ponto". Ajusta o centro e o ponto de modo que a circunferência esteja inscrita no triângulo.

3. Para tentar saber como encontrar o centro da circunferência, a partir do triângulo, traça as retas que unem o centro da circunferência aos lados desse triângulo. Que regularidades encontras na posição dessas retas? [Observa, em particular, a posição das retas em relação aos ângulos internos do triângulo.]

4. Constrói o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois dos lados do triângulo. Repete a construção anterior para outros dois lados do triângulo.

5. Justifica que o centro se encontra nas bissetrizes dos lados do triângulo.

6. Apagando a circunferência, a partir do triângulo, como procederias para encontrar, de forma rigorosa, o centro da circunferência inscrita no triângulo?

7. Constrói a circunferência inscrita no triângulo.

O ponto encontrado é designado por **incentro** e é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Tarefa 4

Outro ponto notável do triângulo

Parte I – Descobrir o ponto

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

2. Marca um ponto G no interior do triângulo, e constrói os três triângulos definidos pelo ponto e dois vértices do triângulo inicial. Mede a área dos três triângulos.

Ajusta a localização do ponto G de forma a que as três áreas sejam aproximadamente iguais.

3. Para tentar saber como encontrar a localização exata do ponto G, de modo a que as três áreas sejam iguais, traça as retas que contêm o ponto G e os vértices do triângulo original. Cada uma destas retas interseta os lados do triângulo inicial em três pontos, numa localização específica.

Faz uma conjetura sobre a localização de cada um desses pontos.

4. Explica como procederias para encontrar, de forma rigorosa o ponto que permite dividir o triângulo em três triângulos com a mesma área.

O ponto encontrado é designado por **baricentro**.

Parte II - Equilíbrio

Recorta um triângulo qualquer num cartão e constrói o baricentro desse triângulo.

Tenta equilibrar esse triângulo num lápis, ou na ponta de um dedo.

Identifica o ponto do triângulo que te permite mantê-lo em equilíbrio - esse ponto é também designado por "**Centro de massa do triângulo**".

Tira uma fotografia do triângulo equilibrado

Escolhe uma fotografia criativa e original.

Tarefa 5

Construção do Ortocentro e identificação de algumas propriedades

1. Abre uma folha de trabalho no GeoGebra e desenha um triângulo com vértices , A B e C.

2. Traça as retas perpendiculares a cada lado, que passam pelo vértice oposto.

Arrasta os vértices do triângulo e observa a interseção das retas.

3. Como observaste, estas três retas intersetam-se sempre num ponto.

O ponto de interseção destas três retas chama-se **ortocentro** do triângulo, que usualmente é designado por H

4. Arrasta os vértices do triângulo $[ABC]$, de forma a que este seja acutângulo e marca A' B' C', os pontos de interseção das perpendiculares com os lados (usualmente designados por "pés das alturas").

5. Une estes pontos com segmentos de reta, formando um triângulo $[A'B'C']$ designado por **triângulo órtico** do triângulo $[ABC]$

O que acontece se o triângulo for retângulo? Porquê?

6. Num triângulo acutângulo, o ponto é um ponto $\boldsymbol{H}$ notável do triângulo órtico.

Identifica de que ponto se trata. Usa as ferramentas do GeoGebra para testar a tua conjetura.

[Extra]

7. Desenha um triângulo e a respetiva circunferência circunscrita. Traça as três perpendiculares aos lados do triângulo que passam pelo vértice oposto, e marca os pontos de interseção dessas retas com a circunferência, designa esses três pontos por P_1., P_2 e P_3.

Descreve-a relação entre o ortocentro do triângulo e os pontos de interseção das alturas com a circunferência circunscrita.

Sugestões:

1. Começa por analisar os triângulos em que o ortocentro pertence ao interior do triângulo, e verifica depois se a tua conjetura é válida para qualquer triângulo.
2. Efetua uma reflexão de cada um dos pontos P_1., P_2 e P_3 em relação ao lado correspondente do triângulo.

Tarefa 6

Pontos notáveis do triângulo

Abre o ficheiro do Geogebra em https://www.geogebra.org/m/hu5qkvrm ou através do QRCodeseguinte.

1. Os pontos , P_1, P_2, P_3 e P_4,apresentados na construção, são pontos notáveis do triângulo. Faz corresponder cada um destes pontos com a respetiva designação (baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro).

2. Três desses pontos notáveis são colineares. Quais?

Que nome se dá à reta que passa por esses três pontos? Descobre o nome na Internet.

3. Alterando o triângulo anterior, conjetura sobre a localização dos pontos notáveis em triângulos equiláteros, isósceles, retângulos e obtusângulos, e assinala com um (X) na tabela as propriedades que se verificam.

	Equilátero	Isósceles	Retângulo	Obtusângulo
O ortocentro coincide com um vértice				
Os quatro pontos notáveis são coincidentes				
Os quatro pontos notáveis são colineares e não coincidentes				
O circuncentro localiza-se no exterior do triângulo				
O ortocentro localiza-se no exterior do triângulo				
O circuncentro pertence a um dos lados do triângulo				

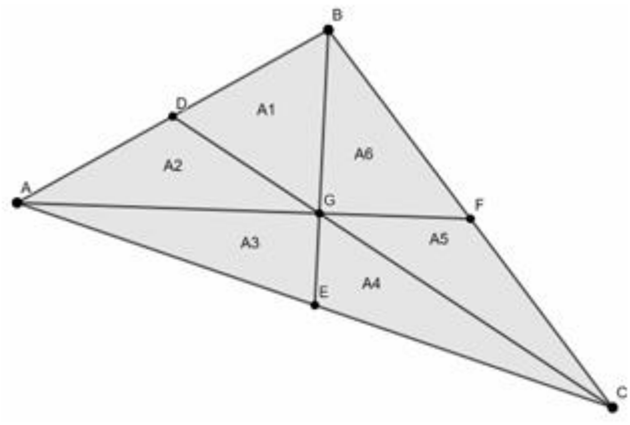
Tarefa 7

Propriedades do baricentro (I)

Considera um triângulo $[ABC]$ e as suas três medianas. O triângulo $[ABC]$ fica dividido em seis triângulos.

Movimentando um qualquer vértice do triângulo inicial podes observar que as áreas dos seis triângulos se vão alterando.

Havería alguma relação entre as medidas dessas áreas?



Parte I- Exploração

Explora esta situação utilizando o Geogebra.

1. Abre o Geogebra e constrói um triângulo

2. Traça as três medianas do triângulo.

3. Altera o triângulo inicial e verifica que as três medianas se intersetam num único ponto.

A esse ponto chamamos **baricentro**.

4. Determina as áreas dos 6 triângulos obtidos.

5. Estabelece uma relação entre essas áreas e verifica que essa relação se mantém para outros triângulos (alterando o triângulo inicial).

Parte II- Justificação

1. Justifica que cada mediana divide o triângulo em dois triângulos equivalentes.

2. Completa as seguintes igualdades, justificando:

Nota: Na tua resposta utiliza a notação apresentada na figura para as seis áreas dos triângulos (A1, A2, A3, A4, A5 e A6).

- A1+A2+A3=__________
- A1=______
- A3=______
- A5=______

3. Substitui alguns destes resultados noutras equações e simplifica-as de modo a mostrar que as áreas dos seis triângulos são iguais, ou seja, que estes triângulos são equivalentes.

Tarefa 8

Propriedades do baricentro (II)

Parte I- Exploração

1. Abre o Geogebra e constrói um triângulo.

2. Traça as três medianas do triângulo.

3. Altera o triângulo inicial e verifica que as três medianas se intersetam num único

ponto. A esse ponto chamamos baricentro.

4. Determina as distâncias:

- Do baricentro a um dos vértices;
- Do baricentro ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

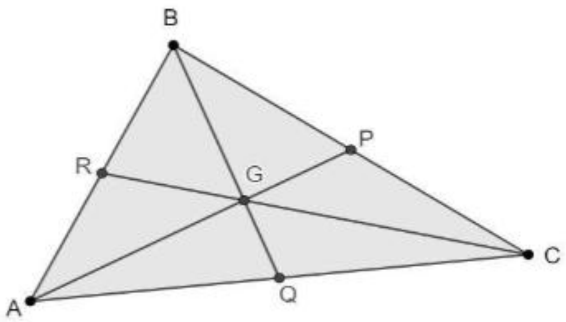
5. Estabelece uma relação entre essas duas distâncias.

6. Verifica se essa relação se mantém:

- para as outras medianas;
- para outros triângulos (alterando o triângulo inicial).

Parte II- Justificação

Na figura seguinte está representado o triângulo $[ABC]$, as suas três medianas e o baricentro.



1. Justifica que os segmentos de reta $[RP]$ e $[AC]$ são paralelos e que $\overline{AC} = 2\overline{RP}$

2. Justifica que os triângulos $[RPG]$ e $[ACG]$ são semelhantes e indica qual é a respetiva razão de semelhança.

3. Qual é a relação entre $\overline{AG}$ e $\overline{GP}$?

4. Relaciona o comprimento de uma mediana de um triângulo com a distância do baricentro ao respetivo vértice.

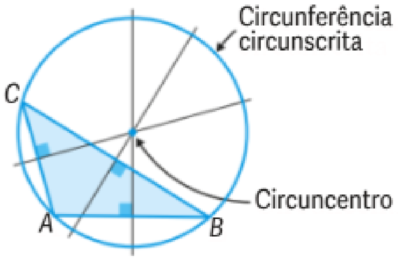
Síntese

Circuncentro

As mediatrizes dos três lados de um triângulo intersetam-se num ponto designado por **circuncentro** do triângulo, que é o centro da única circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, da circunferência que passa nos três vértices do triângulo.
O circuncentro pode não pertencer ao triângulo.

Ver páginas 136 e 137

Exemplo:

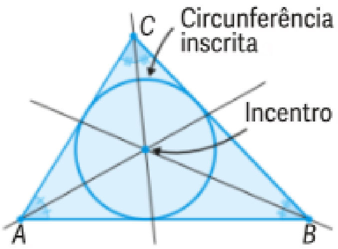


Incentro

As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo intersetam-se num ponto designado **incentro** desse triângulo, que é o centro da única circunferência inscrita no triângulo, ou seja, da circunferência que é tangente aos três lados do triângulo.

Ver páginas 138 e 139

Exemplo:



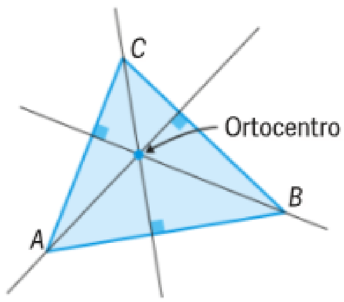
Ortocentro

O **ortocentro** de um triângulo é o ponto de interseção das retas suporte das alturas do triângulo.

O ortocentro pode não pertencer ao triângulo.

Ver página 140

Exemplo:



Baricentro

O **baricentro** de um triângulo é o ponto de interseção das medianas do triângulo.

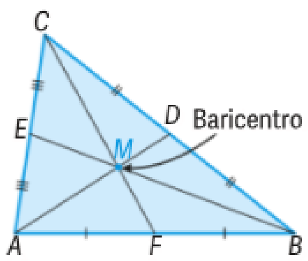
Propriedades:

- As três medianas de um triângulo dividem-no em seis triângulos equivalentes.
- A distância do baricentro a qualquer dos vértices do triângulo é $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana respetiva.

O baricentro também se designa por centro de massa ou centróide do triângulo.

Ver páginas 141 a 142

Exemplo:



- Se a área do triângulo $[ABC]$ for 18 cm^2, tem-se:

$$A_{\Delta[AFM]} = A_{\Delta[FBM]} = A_{\Delta[BDM]} = A_{\Delta[DCM]} = A_{\Delta[CEM]} = A_{\Delta[EAM]} = \frac{18}{6} = 2\text{ cm}^2$$

- Se $\overline{AD} = 15\text{ cm}$, tem-se:
  - $\overline{MD} = \frac{1}{3} \times 15 = 5\text{ cm}$
  - $\overline{AM} = \frac{2}{3} \times 15 = 10\text{ cm}$

Exercícios: Pág 146, 147 e 149 (**Manual Máximo 10ºano– Porto Editora**)

Tarefas Complementares: da 153 até à 160 (**Manual Máximo 10ºano– Porto Editora**)

Tarefa 9

Circunferência dos nove pontos

Parte I- A circunferência dos nove pontos e os pontos de Euler

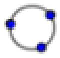
1. Abre uma folha de trabalho no GeoGebra e desenha um triângulo que não seja retângulo.

2. Traça as retas que contêm cada um dos lados do triângulo $[ABC]$

3. Marca as alturas do triângulo $[ABC]$ e o ortocentro. Designa-o por H.

4. Marca os pontos médios dos segmentos de reta que unem cada um dos vértices do triângulo ao ortocentro.

Estes pontos são designados por **pontos de Euler**.

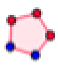
5. Usando a ferramenta , traça a circunferência que contém os pontos de Euler.

6. Marca os pontos de intersecção das alturas com as retas que contêm os lados do triângulo, a que chamamos pés das alturas. O que observas?

7. Agora marca os pontos médios de cada um dos lados do triângulo. O que observas?

8. Experimenta mover os vértices do triângulo e faz uma conjetura sobre a circunferência que traçaste.

Parte II- A circunferência dos nove pontos num triângulo equilátero

1. Abre uma folha de trabalho no GeoGebra e desenha um triângulo equilátero, usando a ferramenta .

2. Traça os pontos médios de cada um dos lados do triângulo e a circunferência que os contém. O que observas?

3. Marca o ortocentro do triângulo e os seus pontos de Euler. O que observas?

4. Os três pés das alturas também são pontos da circunferência dos nove pontos.

O que "aconteceu" a estes três pontos? Porquê?

5. Comenta a seguinte afirmação: "A circunferência dos nove pontos de um triângulo equilátero é a circunferência inscrita".

Parte III- A circunferência dos nove pontos num triângulo retângulo

1. Abre uma folha de trabalho no Geogebra e desenha um triângulo retângulo.

2. O que podes afirmar sobre o ortocentro desse triângulo? E onde se situam os seus pontos de Euler?

3. Será que neste caso a circunferência dos nove pontos contém o ortocentro do triângulo? Porquê?

4. Marca a circunferência dos nove pontos com a ferramenta "Circunferência (Três Pontos)". O que observas? Identifica a localização dos nove pontos da circunferência?

5. Marca a circunferência circunscrita.

Compara os raios das duas circunferências. O que observas?

Faz uma conjectura.

[Extra]

6. Mostra que o raio da circunferência circunscrita é igual ao diâmetro da circunferência dos nove pontos. Começa por justificar que entre os pontos de interseção da circunferência dos 9 pontos com o triângulo existem quatro que formam um retângulo.

7. Será que o raio da circunferência circunscrita é igual ao diâmetro da circunferência dos nove pontos num triângulo qualquer?

Usa o GeoGebra para investigar esta relação

Tarefa 10

Relações métricas entre pontos notáveis do triângulo

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

Constrói o baricentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

2. Mede as distâncias entre o baricentro e o ortocentro e entre o baricentro e o circuncentro.

Que relação te parece existir entre estas duas distâncias?

Síntese

Reta de Euler

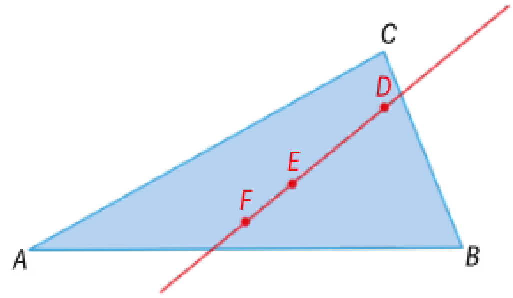
Em qualquer triângulo acutângulo não equilátero ou obtusângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares.
À reta que passa pelos três pontos chama-se **Reta de Euler**.

Observação:
Nos triângulos equiláteros não existe reta de Euler, porque o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são coincidentes.

Propriedade:
A distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro.

Ver páginas 150 e 151

Exemplo:



D – Ortocentro; E – Baricentro; F – Circuncentro

Sabendo que $\overline{DF} = 12$ cm, tem-se:

- $\overline{EF} = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ cm
- $\overline{DE} = \frac{2}{3} \times 12 = 12 - 4 = 8$ cm

Circunferência dos nove pontos

Em qualquer triângulo existe uma circunferência que passa pelos três **pontos médios dos seus lados**, pelos três **pés das perpendiculares às retas suporte dos seus lados e que passam pelo vértice oposto** e ainda pelos três **pontos médios dos segmentos de reta cujas extremidades são o ortocentro e os seus vértices**.

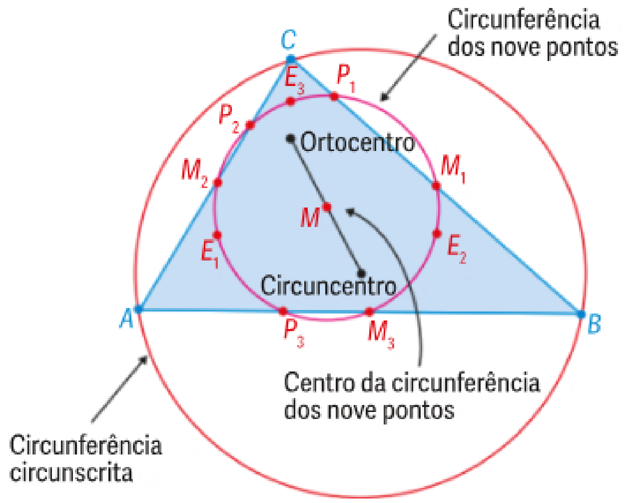
A essa circunferência chama-se **circunferência dos nove pontos**.

Sendo O o ortocentro de um triângulo $[ABC]$, os pontos médios dos segmentos de reta $[AO]$, $[OB]$ e $[OC]$ designam-se por **pontos de Euler**.

Propriedades
- O centro da circunferência dos nove pontos de um triângulo é o ponto médio do segmento de reta cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro do triângulo.
- O raio da circunferência dos nove pontos de um triângulo é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Ver páginas 152 e 153

Exemplo:



M_1, M_2 e M_3 – pontos médios dos lados do triângulo

P_1, P_2 e P_3 – pés das perpendiculares aos lados do triângulo que passam pelo vértice oposto

E_1, E_2 e E_3 – pontos de Euler

M – ponto médio do segmento de reta cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro do triângulo

Se o raio da circunferência circunscrita ao triângulo medir 10 cm, o raio da circunferência dos nove pontos mede 5 cm.

Exercícios: Pág 154, 155 e 157 (**Manual Máximo 10ºano– Porto Editora**)

Tarefas Complementares: da 161 até à 165 (**Manual Máximo 10ºano– Porto Editora**)