

1. Opção (D)

2.1. Como se trata de um triângulo retângulo:

- o ortocentro coincide com o ponto R , vértice do ângulo reto;
- o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa, ou seja, o ponto médio de $[PQ]$.

2.2. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{PQ}^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 = 225$. Logo, $\overline{PQ} = \sqrt{225} = 15$.

Seja r o raio da circunferência dos nove pontos.

C , ponto médio de $[PQ]$, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Logo, $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR}$.

$$\overline{PC} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \quad r = \frac{\overline{PC}}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75$$

Assim, o comprimento da circunferência dos nove pontos é dado por $2\pi \times 3,75 \approx 23,56$ cm.

2.3. Como o triângulo é retângulo, o ponto O coincide com R . Então, $\overline{OC} = \overline{RC} = \overline{PC} = 7,5$ cm, uma vez que C é equidistante dos vértices do triângulo.

2.4. $\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{RC} = \frac{1}{3} \times 7,5 = 2,5$ cm

2.5. $A_{[PQR]} = \frac{\overline{PR} \times \overline{QR}}{2} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$

Seja $\overline{RR'}$ a altura relativamente à base $[PQ]$.

Assim, $\frac{\overline{PQ} \times \overline{RR'}}{2} = 54 \Leftrightarrow \frac{15 \times \overline{RR'}}{2} = 54 \Leftrightarrow \overline{RR'} = 7,2$

3.1. $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 3, 4\}$, $D'_f = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$

3.2. $f(1) - \frac{1}{3}f(4) + f(-2) = 0 - \frac{1}{3} \times (-2) + (-3) = -\frac{7}{3}$

3.3. a) $x \in \{-1, 3\}$

b) $x \in \{-1, 0, 1, 3, 4\}$

4. Opção (D)

Os pontos $(1, 0)$ e $(0, -3)$ pertencem ao gráfico de f , pelo que, para $f(x) = ax + b$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

Assim, $f(x) = 3x - 3$.

5. A função h é afim, logo é definida por uma expressão do tipo $h(x) = ax + b$.

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[, \text{ então } 2 \text{ é o zero da função } h.$$

$$h(0) = \frac{3}{2}, \text{ logo } h(x) = ax + \frac{3}{2}.$$

$$h(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Assim, } -(3-k) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 3-k = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{9}{4}.$$

6.1. Opção (D)

6.2. Opção (C)

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-3)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 9 \Leftrightarrow x-3 = 3 \vee x-3 = -3 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 0$$

7. Para admitir uma única solução, o binómio discriminante, Δ , tem de ser zero.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (k-2)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0 \Leftrightarrow (k-2)^2 = 36 \Leftrightarrow k-2 = 6 \vee k-2 = -6 \Leftrightarrow k = 8 \vee k = -4$$

$$k \in \{-4, 8\}$$

8. Opção (B)

$$9. -2x^2 + 3x + c = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) + c = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} + c$$

O eixo de simetria do gráfico de f é a reta paralela ao eixo Oy que passa no ponto $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

Como a concavidade é voltada para baixo, a função f é crescente em $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$ e decrescente em

$\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$, pelo que as afirmações (I) e (III) são falsas.

Para $c = \frac{1}{2}$, tem-se $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{13}{8}$, pelo que $D'_f = \left]-\infty, \frac{13}{8}\right]$.

Logo, a afirmação (II) é verdadeira.

$$10.1. f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x = -x \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$

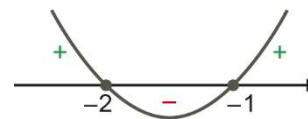
$$g(-4) = -(-4) = 4$$

Assim, $I(-4, 4)$.

10.2. $x^2 + 3x \leq -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \leq 0$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

$$x \in [-2, -1]$$



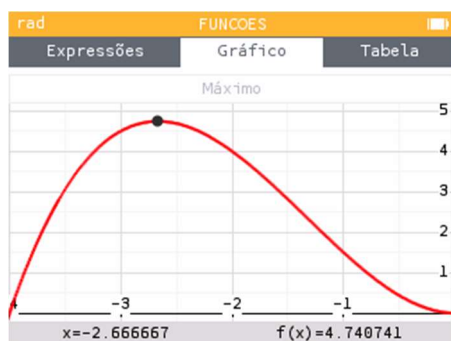
10.3. a) $C(x, 0)$, $x \in]-4, 0[$

$$A(x, y_A) = A(x, g(x)) = A(x, -x)$$

$$B(x, y_B) = B(x, f(x)) = B(x, x^2 + 3x)$$

$$A_{[AB]} = \frac{(y_A + (-y_B)) \times (-x)}{2} = \frac{(-x - x^2 - 3x) \times (-x)}{2} = \frac{(-x^2 - 4x) \times (-x)}{2} = \frac{x^3 + 4x^2}{2} = \frac{x^3}{2} + 2x^2$$

b) $h(x) = \frac{x^3}{2} + 2x^2$, $x \in]-4, 0[$



$$x \approx -2,67$$