Matemática
Ficha de Trabalho

Questões de resposta aberta - global

12ºano

1. A escolha múltipla de um teste tem cinco questões, cada uma com quatro opções das quais só uma é correcta.

Se um aluno responder às cinco questões ao acaso:

1.1. Qual é a probabilidade de acertar apenas na primeira?

1.2. Qual é a probabilidade de acertar exactamente em três questões?

2. Um grupo de jovens, formado por 5 rapazes e 5 raparigas, vai dividir-se em duas equipas de 5 elementos, cada uma para disputarem um jogo.

2.1. Supondo que a divisão é feita ao acaso, qual a probabilidade:

2.1.1. das duas equipas ficarem constituídas por elementos todos do mesmo sexo?

2.1.2. de uma equipa ter exactamente dois rapazes?

2.2. O grupo tem dez camisolas numeradas de 1 a 10. Supondo que são distribuídas ao acaso, qual é a probabilidade das raparigas ficarem todas com números pares?

2.3. No final do jogo, os dez alunos dispõem-se (ao acaso) em fila, para uma fotografia.

Supondo que têm todos alturas diferentes, qual é a probabilidade de ficarem ordenados por alturas?

3. Considera o desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{12}$, $x\rangle 0$.

3.1. Prova que não existe um termo em x^2.

3.1. Determina o termo médio do desenvolvimento deste binómio.

4. Considera que, numa região do país, os números de telefone são formados por nove algarismos, iniciando-se por 237.

Sabe-se que o quarto algarismo é não inferior a 1 e menor do que 5, não havendo restrições para os restantes algarismos.

4.1. Quantos números de telefone se podem registar nesta região?

4.2. Uma rádio local vai oferecer um prémio, escolhendo ao acaso um número de telefone possível nesta região.

Qual a probabilidade de ser escolhido um número que:

4.2.1. tenha todos os algarismos diferentes?

4.2.2. tenha exactamente dois 2 e dois 0?

4.2.3. seja capicua?

5. Lançam-se dois dados com a forma de tetraedro regular, um branco e outro preto, numerados de 1 a 4.

Os números das faces que ficam assentes são respectivamente o valor de b e de c na equação:

$$x^2+bx+3c=0.$$

Qual a probabilidade da equação obtida ser impossível no conjunto dos números reais?

6. Considera o seguinte problema:

De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par?

Uma resposta correcta a este problema é: ${}^{9}A_3 - {}^{5}A_3$.

Numa **pequena composição** explica porquê.

7. Uma moeda defeituosa, quando é lançada, ou sai face (F) ou sai verso (V).

Sabe-se que:

$$p(F)=\frac{1}{3}p(V).$$

7.1. Determina $p(F)$ e $p(V)$.

7.2. Determina a probabilidade de, em quatro lançamentos, apenas no último sair verso (V). Apresenta o resultado sob a forma de fracção irredutível.

7.3. O Pedro e o Rui já detectaram que a moeda não é equilibrada. Fazem um jogo que consiste em lançar a moeda cinco vezes. A vitória é atribuída ao Pedro se sair pelo menos duas faces (F).

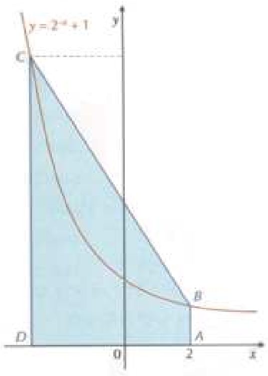
O Rui é considerado vencedor se nos cinco lançamentos ocorrerem exactamente quatro versos (V).

Qualquer outra situação é considerada como empate.

Numa **pequena composição**, explica se o jogo te parece equilibrado, isto é, se ambos os jogadores têm igual probabilidade de vencer.

8. Na figura está representado em referencial o.m. o trapézio $[ABCD]$, em que os vértices B e C pertencem ao gráfico da função f, definida por:

$$f(x)=2^{-x}+1.$$



Admite que a unidade do referencial é o centímetro e que a abcissa dos pontos A e B é 2.

8.1. Determina:

8.1.1. as coordenadas do vértice B;

8.1.2. a altura do trapézio, sabendo que a ordenada do vértice C é 9.

8.2. Designa por x a abcissa dos vértices C e D, com $x \in \Re$.

8.2.1. Por processos exclusivamente analíticos, determina x de modo que:

$$\overline{CD} = 4\times \overline{AB}$$

8.2.2. Por observação da figura, indica para que valor tende a área do trapézio quando x tende para 0.

9. Para disputar um jogo, escolheram-se quatro alunos de cada uma das turmas A, B e C do 12º ano, e numeraram-se de 1 a 4 os alunos escolhidos em cada uma das turmas.

9.1. De quantas maneiras se pode formar uma fila com os alunos escolhidos, de modo a que os alunos de cada turma fiquem juntos?

9.2. Supõe agora que se seleccionaram alguns destes 12 alunos. Neste novo grupo, escolhendo um aluno, ao acaso, sabe-se que:

- A probabilidade de ser da turma A é 60%.
- A probabilidade de ter o número 4 é 20%.
- A probabilidade de ser da turma A ou ter o número 4 é 75%.

Mostra que o aluno da turma A com o número 4 faz parte deste grupo.

10. A turma X tem 25 alunos: **15** rapazes e **10** raparigas. Para organizar a viagem de finalistas vai constituir-se uma comissão de três elementos: um para tratar dos transportes, outro para tratar dos alojamentos e um terceiro para tratar da animação.

10.1. Quantas comissões diferentes podem ser constituídas?

10.2. Sendo a comissão constituída de forma aleatória, qual a probabilidade de não ser uma comissão mista?

10.3. Sabendo que tem de ser uma rapariga a tratar dos alojamentos, de quantas maneiras diferentes pode ser constituída a comissão?

10.4. A Marta é aluna da turma,

10.4.1. sabendo que a Marta faz parte da comissão, quantas comissões se podem formar?

10.4.2. supondo que a comissão é formada ao acaso, qual a probabilidade da Marta ser escolhida para tratar dos transportes?

11. Dos alunos da Escola Boa Sorte, sabe-se que:

- a quarta parte não vai à escola;
- metade não sabe o nome dos professores;
- dos que não sabem o nome dos professores, um quarto não vai à escola.

Escolhendo ao acaso um aluno desta escola:

11.1. Qual a probabilidade de não ir à escola nem saber o nome dos professores?

11.2. Verifica se a probabilidade de ele saber o nome dos professores é independente de ir ou não à escola.

12. Uma turma do 12º ano tem rapazes e raparigas num total de 24. Considera a experiência que consiste em escolher ao acaso dois alunos dessa turma. Seja **X** a variável que representa o número de raparigas escolhidas.

Na tabela seguinte encontra-se representada parte da distribuição de probabilidades da variável **X**.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{10}{23}$	$\frac{32}{69}$	

12.1. Completa a tabela.

12.2. Quantos rapazes e quantas raparigas tem a turma? Justifica a tua resposta.

13. Prova que:

$$p(A/B) = 1 + \frac{p(\overline{A} \cap \overline{B}) - p(\overline{A})}{p(B)}, \quad \forall\ A, B \subset E \ \ e \ \ p(B) \neq 0.$$

14. A Mariana tem no frigorífico oito iogurtes, dos quais três são naturais e cinco de sabores: dois de banana, um de morango, um de coco e um de ananás.

A Mariana retira do frigorífico três iogurtes ao acaso. Determina a probabilidade de ter retirado:

14.1. três iogurtes iguais;

14.2. dois e só dois iogurtes iguais;

14.3. um iogurte natural e dois de sabores diferentes.

14.4. Admite que a Mariana coloca, lado a lado, os cinco iogurtes de sabores. Se o fizer ao acaso, qual é a probabilidade de os dois iogurtes com sabor a banana não ficarem juntos?

15.

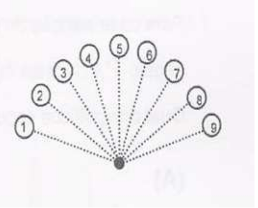
15.1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de S.

Prova que:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times \left[1 - P(B/A)\right]$$

15.2. Numa sessão do concurso de televisão “O Elo Mais Fraco”, estão, à partida, nove concorrentes, seis masculinos e três femininos nos lugares numerados de 1 a 9.



15.2.1. Já foram eliminados dois concorrentes, um de cada vez. Qual é a probabilidade de terem sido ambos masculinos?

15.2.2. Entretanto, já foram eliminados (no total) quatro concorrentes. De quantas maneiras possíveis podem estar os restantes nos nove lugares postos à disposição dos concorrentes?

16. Para cada número real k pertencente ao intervalo $]0, 2[$ a expressão:

$$f(x)=\begin{cases} \ln\left(\dfrac{2-x}{x}\right) & se \ \ 0 \langle x \leq k \\ \dfrac{3}{4}x - e^{-x} & se \ \ x \rangle k \end{cases}$$

define uma função f de domínio $\Re^{+}$

16.1. Nas duas alíneas seguintes considera $k=1$.

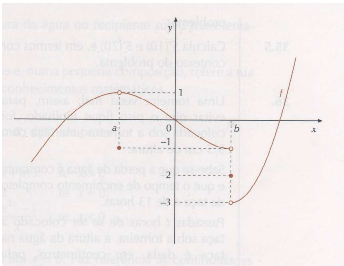
16.1.1. Por processos analíticos, estuda o gráfico de f quanto à existência de assimptotas.

16.1.2. Recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, mostra que a equação $f(x)=2\,f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1{,}5;\ 2[$.

16.2. Existe um valor de k para o qual a função f é contínua. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina um valor aproximado desse valor de k arredondado às centésimas.

Explica e justifica o teu procedimento.

17. No referencial da figura está representada a função g, de domínio $\Re$.



17.1. Indica o valor de cada um dos seguintes limites:

17.1.1. $\lim\limits_{x \to a^{+}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$;

17.1.2. $\lim\limits_{h \to 0^{+}} \dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$;

18. Sobre uma função f sabe-se que: $f'(3)=2 \ \ e \ \ f(3)=1$.

18.1. Indica, caso exista, o valor de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

18.2. Escreve uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.

18.2. Calcula: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x^{2}-9}$.

19. Dadas as funções f e g, ambas de domínio $\Re^{+}$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes pares é uma assimptota do gráfico de f e que g é definida por:

$$g(x)=\frac{x+1}{f(x)}.$$

Prova que a recta de equação $y=-1$ é uma assimptota do gráfico de g.

20. Um laboratório desenvolveu um teste para diagnosticar uma doença.

Dos estudos feitos à fiabilidade do teste conclui-se que, ao aplicar o teste a pessoas **efectivamente doentes**, em 96% dos casos o resultado foi positivo. Quando aplicado a pessoas **sem doença**, em 3% dos casos deu positivo.

Numa localidade onde a incidência da doença é de 2%, procedeu-se a um rastreio.

Uma certa pessoa submeteu-se a um teste.

20.1. Qual é a probabilidade de o resultado do teste ser positivo?

20.2. Sabendo que o resultado do teste foi positivo, qual é a probabilidade de a pessoa, apesar disso, não ter a doença?

21. Dois velhos amigos, o Antunes e o Silva, quando se encontram, têm o hábito de jogar "à moeda".

Este jogo consiste no seguinte:

- cada jogador coloca numa das mãos um número de moedas escolhido ao acaso, sendo no máximo três moedas;

- todos os jogadores dão um palpite sobre o número total de moedas e, em seguida, abrem as mãos, revelando o número de moedas que cada um tem.

Ganha o jogador cujo palpite coincide com o número total de moedas.

Considera uma jogada entre o Antunes e o Silva e a variável aleatória, que representa o "**número total de moedas** que os jogadores apresentam na jogada".

21.1. Indica os valores que a variável aleatória pode tomar.

21.2. Apresenta a distribuição de probabilidades relativa à variável considerada, através de uma tabela.

21.3. O palpite do Antunes foi quatro moedas e o do Silva foi seis moedas.

Qual dos amigos tem maior probabilidade de acertar na jogada? **Justifica** a tua resposta.

21.4. Se os dois amigos jogarem 80 vezes, em quantas se pode esperar que o total de moedas seja 4?

22. Admite que a altitude de um avião, em pés, é dada pela função definida por:

$$a(v)=230\left(\log_4 80-\log_4 5\right)+920\log_4 v$$

sendo v a velocidade do avião em nós, $140 \leq v \leq 600$.

22. 1. A que altitude voava o avião quando ia a uma velocidade de $926\,Km/h$?

Apresenta o resultado em pés, arredondado às unidades.

Nota: 1 nó = 1852 metros por hora.

22. 2. Recorre à calculadora para determinares **graficamente** a solução da equação que te permite resolver o seguinte problema:

De quanto foi o aumento da velocidade do avião entre os 4200 e os 4500 pés?

Apresenta todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou os **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos (arredondadas às décimas).

Apresenta a resposta em nós, arredondado às décimas.

23. Determina, se existirem, os seguintes limites:

23.1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{11+x} - 3}{x+2}$

23.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 9x}{x^3 - 3x^2}$

23.3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x^2}{4x-4}$

24. Uma professora de Matemática acha que a temperatura, em graus Celsius, do motor do seu automóvel é dada, em função dos quilómetros percorridos x, por:

$$t(x) = \begin{cases} 22{,}5 \times 4^x & se \;\; 0 \leq x \langle 1 \\ 90 & se \;\; x \geq o \end{cases}$$

24.1. Sem recorreres à calculadora, justifica que a função t é contínua no seu domínio.

24.2. Sem recorreres à calculadora, (a não ser para efectuares eventuais cálculos numéricos), mostra que houve pelo menos uma distância percorrida pelo seu automóvel, entre os $0{,}5$ e os $1{,}5$ quilómetros, após o qual o motor atingiu os $80^{\circ} C$ de temperatura.

Bom Trabalho

Josefa Bastos