Matemática
Ficha de Apoio

Modelos de Probabilidade - Introdução

12ºano

Introdução às probabilidades

No final desta unidade, cada aluno deverá ser capaz de:

- Identificar acontecimentos com conjuntos e operar com eles;
- Encontrar modelos matemáticos adequados ao estudo de fenómenos aleatórios;
- Utilizar o conceito frequencista de probabilidade e o conceito clássico de probabilidade ou de Laplace;
- Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir de modelos de probabilidade simples;
- Identificar e utilizar as propriedades básicas das distribuições de probabilidades;
- Utilizar a calculadora e/ou o computador na resolução de problemas, envolvendo distribuições de probabilidade, em particular a distribuição normal.

Experiência aleatória /Experiência Determinista.

Numa caixa foram introduzidas dez bolas iguais numeradas de 1 a 10. Uma jogada consiste em extrair uma bola da caixa. Todas as jogadas são iniciadas com dez bolas na caixa e o custo de cada jogada é 2€.

a) Numa jogada é possível determinar antecipadamente o número da bola de vai sair?

b) Numa sequência de três jogadas é possível determinar antecipadamente o número de vezes em que ocorre a bola número 5?

c) É possível determinar o número de jogadas a efectuar para que o preço a pagar seja 8€?

d) É possível determinar o preço a pagar por uma sequência de 6 jogadas?

Uma **Experiencia aleatória** é uma experiência da qual se conhecem os resultados possíveis, mas relativamente à qual não é possível prever (determinar) o resultado de cada uma das experiencias.

Uma **Experiência Determinista** é uma experiência em que é possível determinar o resultado mesmo antes de ser efectuada, desde que sejam conhecidas as condições em que se realiza.

Conjunto de Resultados ou **Espaço Amostral** de uma experiência aleatória é o conjunto de resultados possíveis que lhe está associado.

Representa-se, habitualmente por, S, E ou Ω.

Qual é o conjunto de resultados possíveis associados a esta experiência?

$$\Omega = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Na realização da experiência considerada, pode haver interesse em verificar a ocorrência ou não dos seguintes acontecimentos:

A: "sair número par";

B: "sair número múltiplo de 5";

C: "sair número inteiro";

D: "sair número maior do que 10";

E: "sair número primo maior que 6";

A cada um destes acontecimentos está associado um subconjunto do conjunto de resultados, por exemplo:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

e) Define cada uma dos restantes sub-conjuntos

Dada uma experiência aleatória em que o espaço amostral é Ω, dá-se o nome de **Acontecimento** a todo o sub-conjunto de Ω.

Acontecimento Composto – constituído por mais do que um elemento de Ω.

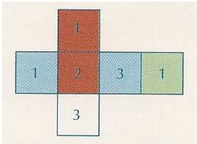
Acontecimento Elementar – constituído por um único elemento de Ω.

Acontecimento Certo – constituído por todos os elementos de Ω.

Acontecimento Impossível – não tem qualquer elemento de Ω. É um acontecimento que não tem qualquer probabilidade de ocorrer, ou seja, que nunca se verifica.

Exercício 1

Na figura encontra-se representada uma planificação de um dado.



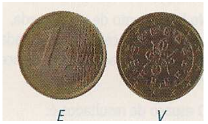
Indica o conjunto de resultados de cada uma das experiências:

a) Lançamento do dado e registo do número obtido;

b) Lançamento do dado e registo da cor voltada para cima.

Exercício 2

Designando por E, a face euro e por V a face verso, indica o espaço de resultados na experiência que consiste no registo da face que fica voltada para cima quando se efectua:

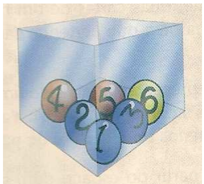


a) O lançamento de uma moeda uma só vez;

b) O lançamento de uma moeda duas vezes.

Exercício 3

Na figura encontra-se representada uma caixa com seis bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 6, sendo três delas azuis, duas vermelhas e uma amarela.



Considere a experiencia que consiste em retirar aleatoriamente uma bola da caixa e registar o número.

a) Indica o espaço de resultados Ω.

b) Considera os seguintes acontecimentos

A: "sair número par";

B: "sair número não superior a 4";

C: "sair número primo";

D: "sair múltiplo de 4";

I) Representa-os na forma de conjuntos.

II) Indica um acontecimento elementar e um acontecimento composto.

c) Relativamente à experiência aleatória que consiste em retirar uma bola da caixa e registar a cor, indica um acontecimento:

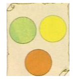
I) Elementar;

II) Impossível;

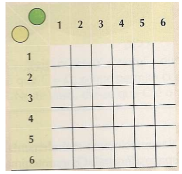
III) Certo.

Exercício 4

O Pedro pretende numerar aleatoriamente os dois círculos coloridos, um amarelo e um verde de um cartaz, com números entre 1 e 6. Para cada um dos círculos vai lançar um dado vulgar com faces numeradas de 1 a 6, e escrever no circulo o resultado obtido no lançamento.

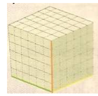


a) Preenche o quadro abaixo e indica o número de elementos do espaço amostral da experiência descrita.



b) Representa sob a forma de conjunto, cada um dos acontecimentos:

c) Supõe agora que o Pedro pretendia colorir três círculos, um vermelho, um amarelo e outro verde, recorrendo ao mesmo processo. Qual é o número de possibilidades que o Pedro tem para colorir os círculos?



Sugestão: imagina a extensão do problema do quadro da alínea anterior a um cubo de "tripla entrada".

Extracções com reposição e sem reposição

Exemplo:

Num saco encontram-se quatro bolas, indistinguíveis ao tacto, e numeradas de 1 a 4.

Considere-se a experiência que consiste na extracção sucessiva de duas bolas, com reposição da primeira bola extraída, e registo do número formado pelos respectivos algarismos, sendo o primeiro o das dezenas e o segundo o das unidades.

Quantos números se podem formar?

Nota: A construção de uma tabela de dupla entrada facilita a identificação de todos os números que é possível formar nas condições referidas.

R:

Considere-se a primeira experiência, mas agora sem reposição da primeira bola extraída. Este facto implica a não ocorrência de números com os dois algarismos iguais.

Nestas condições, quantos números se podem formar?

Resolve o mesmo problema, esquematizando a situação através de um diagrama em árvore:

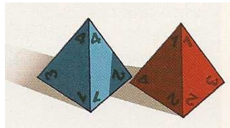
Exercício 5

A associação de pais de uma escola organizou um sorteio de rifas. Para o sorteio existem três urnas, cada uma com dez bolas numeradas de 0 a 9. Os números premiados são obtidos através da extracção de uma bola de cada uma das urnas (por exemplo 088).

Quantos números diferentes se podem formar nestas condições?

Exercício 6

Lançam-se dois dados tetraédricos regulares, um azul e um vermelho, ambos com os vértices numerados de 1 a 4, e registam-se os números dos vértices voltados para cima e a cor do dado.



a) Indica o número de elementos do espaço amostral Ω

b) Representa sob a forma de conjunto cada um dos seguintes acontecimentos:

A: "os números são diferentes e impares"

B: "a soma dos números é par"

C: "pelo menos um número é primo"

Exercício 7

O Luís tem no bolso cinco moedas, uma de 2€, uma de 1€, uma de 50 cêntimos, uma de 20 cêntimos e uma de 10 cêntimos.

Para comprar um gelado custa 1,5€, o Luís retira do bolso, ao acaso, duas moedas e observa quantia obtida.

a) Qual o espaço amostral desta experiência?

b) Indica o número de elementos[1] de cada um dos conjuntos que representam os acontecimentos.

A: "a quantia retirada é suficiente para comprar o gelado"

B: "ainda ficou no bolso dinheiro suficiente para um gelado"

[1] Ao número de elementos de um conjunto dá-se o nome de **cardinal do conjunto**. Representa-se por $\#$.

Exercício 8

Num saco há cinco bolas numeradas de 1 a 5. Um jogador extrai ao acaso duas das bolas, uma de cada vez, **sem reposição**, sendo registado o número de cada uma.

O jogador ganha se retirar bola numeradas por ordem crescente.

Considera os acontecimentos:

A: "o jogador ganha o jogo"

B: "o número da segunda bola é o dobro do da primeira"

a) Indica o número de elementos do conjunto de resultados.

b) Define em extensão os acontecimentos A e B.

Lei de Laplace – recordar…

Seja E uma experiência aleatória em que o espaço amostral Ω é constituído por n elementos, sendo equiprováveis os n acontecimentos elementares.

Se um acontecimento A é formado por m acontecimentos elementares, sendo $m \leq n$, a probabilidade de A é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, isto é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

Exercício 9

No frigorífico há quatro iogurtes de morango, 2 de pêssego e 6 de maça. O Pedro tirou um iogurte ao acaso.

Qual é a probabilidade do iogurte que o Pedro tirou:

a) Ser de maça?

b) Ser de pêssego?

c) Não ser de morango?

Exercício 10

Considera que de um baralho de 40 cartas se extrai, aleatoriamente, uma carta. Determina a probabilidade da carta extraída ser:

a) um ás;

b) um rei;

c) um as ou um rei;

d) não ser uma carta de copas.

Exercício 11

Resolve o problema anterior, considerando agora um baralho de 52 cartas.

Algumas técnicas de contagem – recordar…

- ✓ **Diagrama em árvore**
- ✓ **Tabela de dupla entrada**
- ✓ **Diagrama de Venn**

- ✓ **Princípio Fundamental da Contagem**

Regra do Produto

Quando é necessário realizar k sucessivas, em que na primeira há n_1 alternativas, na segundo há n_2 alternativas, …, na escola de ordem k há n_k alternativas, então o número total de alternativas é dado por $n_1 \times n_2 \times .... \times n_k$

Exemplo:

Se, para uma dada refeição, houver 3 entradas disponíveis, 4 pratos distintos e 2 sobremesas, é possível fazer $3 \times 4 \times 2 = 24$.

Exercício 12

O Sr. José ganhou, num concurso, dois bilhetes para a estreia de um filme, os quais irá distribuir, ao acaso, por dois dos seus quatro filhos, Joana, Rui, André e Filipa.

a) De quantas formas diferentes o pode fazer?

b) De quantas formas diferentes o pode fazer de modo a que a Joana não seja contemplada?

c) Qual é a probabilidade de a Joana não ser contemplada?

Exercício 13

O Rui tem, num bolso do casaco, duas moedas de 0,50€, uma moeda de 1€ e uma moeda de 0,20€. Se retirar duas moedas, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer um quantia que permita pagar uma despesa de 1,20€?

Exercício 14

O cubo pintado

Construi-se um cubo em madeira cujas faces foram pintadas de azul.

Por cortes paralelos às faces, esse cubo deu origem a 64 pequenos cubos, todos de igual tamanho, como é sugerido na figura.

Os 64 cubos foram introduzidos num saco, do qual é retirado um ao acaso. Determina a probabilidade de o cubo retirado ter:

a) Ter três faces pintadas;

b) Ter duas faces pintadas;

c) Ter uma só face pintada;

d) Ter pelo menos uma face pontada;

e) Ter pelo menos duas faces pintadas;

f) Ter, no máximo, duas faces pintadas.