	# Matemática Ficha de Trabalho
	Probabilidades 12º ano – FT4

Arranjos completos (arranjos com repetição)

Na linguagem dos computadores usa-se o código binário que é caracterizado pela utilização de apenas dois algarismos, o 0 e o 1, na escrita dos números.

♦Quantas mensagens diferentes podemos escrever com os dois algarismos?

00 ; 01 ; 10 ; 11 Com dois algarismos pode-se escrever 4 mensagens diferentes.

♦Quantas mensagens diferentes podemos escrever com os três algarismos?

00 < 0 — 000 ; 1 — 001

01 < 0 — 010 ; 1 — 011

10 < 0 — 100 ; 1 — 101

11 < 0 — 110 ; 1 — 111

Com 3 algarismos podemos escrever 8 mensagens: 000; 001; 100; 101; 010; 011; 110; 111.

♦Quantas mensagens diferentes podemos escrever com os cinco algarismos?

Observando que quando acrescentamos 1 algarismo, podemos escrever o dobro das mensagens que escrevemos antes, tem-se: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

Logo, com 5 algarismos podemos escrever 32 mensagens.

♦Quantas mensagens diferentes podemos escrever com os p algarismos?

Por analogia com os casos anteriores, conclui-se que, em geral, com p algarismos podemos escrever 2^p mensagens.

Ao número 2^p chama-se **arranjos com repetição** ou **arranjos completos** de 2 elementos p a p e representa-se por ${}^{n}A'_{p}$.

> Dados n elementos diferentes, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chama-se **arranjos com repetição** ou **arranjos completos** dos n elementos p a p a todas as sequências de p elementos, sendo estes diferentes ou não, que se podem formar com os n elementos.
>
> O número total de sequências designa-se por ${}^{n}A'_{p}$.
>
> e tem-se que:
>
> $${}^{n}A'_{p} = n^p$$
>
> Repare que:
>
> $a_1a_2a_1$ e $a_1a_1a_2$ são sequências

Exercício 1

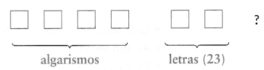
Uma moeda é lançada duas vezes. Quantos resultados possíveis haverá?

Exercício 2

Qual é o número total de apostas simples do totobola (13 jogos)?

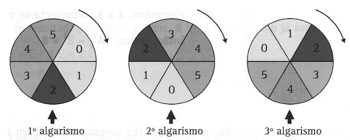
Exercício 3

Qual é o número de matrículas de automóvel diferentes do tipo?



Exercício 4

O número da sorte de uma pequena lotaria obtém-se fazendo girar 3 rodas divididas em sectores numerados de 0 a 5.

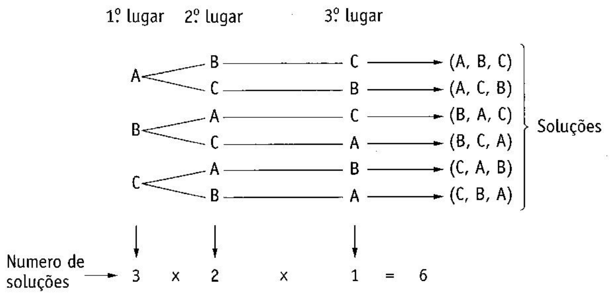


Quantos resultados possíveis há?

Permutações

Depois de feita a primeira selecção num concurso de jovens cantores, ficaram apurados três que irão disputar numa final o 1º, o 2º e 3º prémios. De quantas formas diferentes poderão ficar classificados os três finalistas?

Sejam A, B e C os finalistas.



Cada uma das 6 soluções é um terno ordenado.

É obvio que as diferentes soluções só diferem na ordenação dos elementos A, B e C.

Tudo se passa como se, partindo do conjunto $\{A, B, C\}$, **permutássemos** os elementos entre si até obter todas as formas possíveis de os ordenar.

Dizemos assim que as diferentes ordenações que acabámos de obter são **permutações de 3 elementos**, sendo o seu número traduzido por P_3.

A solução é: $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

♦Se em vez de três finalistas houvesse quatro para distribuir o 1º, 2ª, 3º e 4º prémios, de quantas formas diferentes poderiam ficar distribuídos os prémios?

Facilmente se conclui que são: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas diferentes.

Sendo n um número natural, designa-se por $n!$ (lê-se **factorial de n** ou **n factorial**) o número natural definido por:

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
- $0! = 1$

Chama-se **permutações de n elementos** a todas as sequências diferentes que é possível obter com os n elementos.

O número dessas sequências representa-se por P_n (ler: "permutações de n").

e tem-se que: $P_n = n!$

Exercício 1

Simplifique:

a) $\frac{12!}{10!}$

b) $\frac{n!(n+1)}{(n-1)!}$

c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-1)!}$

d) $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$

e) $\frac{n! + (n+1)!}{n! - (n-1)!}$

Exercício 2

Sem calcular os factoriais, determine:

a) $\left(\frac{7!-5!}{5!} - \frac{P_7}{P_5}\right)^2$

b) a solução de cada uma das equações:

b1) (n+1)! = 5040

b2) x! - 28(x+1)! = -3(x -1)!

Exercício 3

De quantas formas diferentes se podem sentar 8 pessoas nos 8 lugares de um banco de jardim?

Exercício 4

Numa corrida de carros participam 7 carros. Não havendo empate, de quantas formas diferentes pode ficar a classificação final?

Exercício 5

Utilizando todas as letras da palavra "ESCOLA" quantas palavras diferentes, com ou sem significado, se podem formar? E com as letras da palavra " AULA"?

Exercício 6

De quantas formas diferentes se podem colocar 3 livros diferentes de Inglês e 4 livros diferentes de Física numa prateleira? E se ficarem juntos os da mesma disciplina?

Exercício 7

De quantas maneiras se podem sentar 5 pessoas

a) numa fila

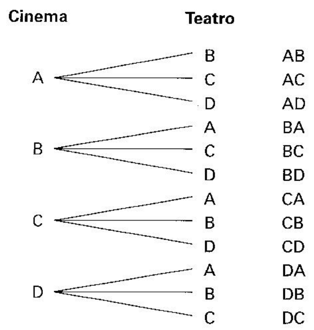
b) à volta de uma mesa redonda, sem haver identificação das cadeiras?

Arranjos simples (arranjos sem repetição)

Quatro amigos arranjaram um bilhete de cinema e outro de teatro para a mesma noite. Como todos estavam interessados, resolveram sorteá-los entre si.

♦Quantas maneiras diferentes há para o resultado do sorteio?

Vamos atribuir uma letra a cada um dos amigos: A, B, C e D.



Como vemos, para o sorteio do bilhete de cinema há quatro resultados: A, B, C ou D.

A cada um destes resultados correspondem três possibilidades para o bilhete de teatro, porque a mesma pessoa não pode ficar com os dois bilhetes. O total de casos possíveis é de $4 \times 3 = 12$.

Ao número 12 também se chama arranjos simples de quatro dois a dois ou arranjos sem repetição de quatro dois a dois e escreve-se:

$${}^4A_2 = 4 \times 3 = 12$$

♦Se os quatro amigos tivessem arranjado três bilhetes, um para o cinema, um para o teatro e outro para o futebol, de quantas maneiras diferentes os podiam sortear entre eles?

Facilmente se conclui que são: ${}^4A_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras diferentes de os sortear entre eles.

♦E se os quatro amigos tivessem arranjado também um bilhete para um concerto?

São: ${}^4A_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes de os sortear entre eles.

Esta situação corresponde precisamente a fazer as permutações de 4, que já sabemos ser igual a $4!$ e portanto a 24.

$${}^4A_4 = 4!$$

Dados n elementos quaisquer, chama-se **arranjos simples** ou **arranjos sem repetição** de n elementos p a p a todas as sequências que é possível obter como os p elementos escolhidos arbitrariamente entre os n dados.

O número de todas estas sequências designa-se por ${}^nA_p$

(ler: "arranjos de n, p a p").

$${}^nA_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) \quad n, p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p$$

Consequências da definição: $\boxed{{}^nA_p = \dfrac{n!}{(n-p)!}, \quad n \geq p}$ $\boxed{{}^nA_n = P_n = n!}$

Exercício 8

Cinco amigos vão fazer um trabalho de grupo. Um deles tem de ser o porta-voz e outro tem de escrever o relatório

De quantas maneiras diferentes podem estas duas tarefas ser distribuídas entre eles?

E se houvesse 3 tarefas a distribuir pelos cinco amigos? De quantas maneiras diferentes podem as tarefas ser distribuídas?

E se as tarefas fossem 4? E 5?

Exercício 9

Determine $n \in \mathbb{N}$, tal que:

a) ${}^{n}A_2 = 12$

b) $3 \times {}^{n}A_4 - 2 \times {}^{n-1}A_5 = 0$

Exercício 10

Numa prova final de natação vão participar 7 nadadores, que disputam as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas formas diferentes se podem repartir estes três prémios?

(Não se admitem empates).

Exercício 11

De quantas maneiras 10 pessoas podem sentar-se num banco com 4 lugares? E com 5 lugares?

Exercício 12

Quantos números de quatro algarismos diferentes existem, no sistema de numeração decimal, que não tenham nenhum zero?

Combinações (combinações sem repetição)

A diferença entre as combinações sem repetição e os arranjos sem repetição está em que nas combinações não interessa a ordem.

♦Cinco pessoas trabalham no sector de exploração de uma firma e três vão ser seleccionados para irem a uma feira internacional. De quantas formas diferentes pode ser feita a selecção?

Vamos atribuir uma letra a cada um dos trabalhadores: A, B, C, D e E.

Neste caso a ordem não interessa. A selecção ACD é a mesma que CAD, por exemplo.

Assim, estamos interessados em "combinações de cinco três a três".

Os casos possíveis são:

ABC	BCD	CDE
ABD	BCE	
ABE	BDE	
ACD		
ACE		
ADE		

Há dez formas diferentes de escolher as três pessoas.

Diz-se que 10 é o número de combinações de cinco, três a três e escreve-se:

${}^{5}C_3 = 10$ ou $\binom{5}{3} = 10$ Este número não é mais do que o quociente entre ${}^{5}A_3$ e 3!.

$${}^{5}C_3 = \frac{{}^{5}A_3}{3!} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Combinações de ***n*** elementos ***p*** a ***p*** (p ≤ n) são os diferentes subconjuntos com ***p*** elementos que se podem formar a partir de um conjunto com ***n*** elementos

De um modo geral:

$${}^{n}C_p = \frac{{}^{n}A_p}{p!},\quad n \geq p \qquad\qquad {}^{n}C_p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},\quad n \geq p$$

${}^{n}C_p$ ou $\binom{n}{p}$ é igual ao número de subconjuntos, com p elementos, que se podem formar num conjunto com n elementos.

Exercício 13

Determina $n \in \mathbb{N}$, tal que:

a) ${}^{n-2}C_2 = 6$

b) ${}^{n+1}C_3 = 4\,{}^{n}C_3$

Exercício 14

Uma aposta de totoloto consiste em assinalar seis números escolhendo-os de 1 a 49. Quantas apostas diferentes se podem fazer?

Exercício 15

De 10 operários vão ser escolhidos 5 para irem trabalhar numa obra. Quantos grupos diferentes se podem formar?

Exercício 16

O Tiago tem 20 CD's de "rock" e prometeu emprestar 4 ao João. Quando chegou a casa quis saber de quantas maneiras diferentes poderia fazer este empréstimo.

Quantas são essas maneiras?

Quantas possibilidades diferentes existem de o Tiago levar 16 dos seus 20 CD´s para um convívio que a associação de estudantes organizou?

Exercício 17

Um saco contém 9 bolas numeradas de 1 a 9. Tiram-se 3 bolas simultaneamente (não interessa a ordem). Quantos resultados diferentes podemos obter?

Contagem de elementos recorrendo ao Cálculo Combinatório