Matemática
Ficha de Apoio

Derivada de uma função num ponto

12ºano

Recorda:

A **taxa média de variação** no intervalo [a,b] é o quociente entre a diferença dos valores da função f nos extremos do intervalo e a amplitude do intervalo:

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

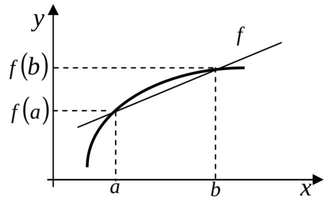
Interpretação geométrica: corresponde ao declive da recta secante ao gráfico nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Se f é estritamente crescente em [a,b], então $t.m.v._{[a,b]} > 0$.

Se f é estritamente decrescente em [a,b], então $t.m.v._{[a,b]} < 0$.

Se f é constante em [a,b], então $t.m.v._{[a,b]} = 0$.

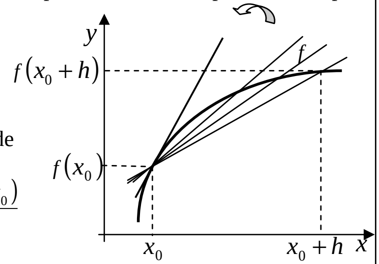
As afirmações recíprocas são falsas.



Taxa de variação de uma função f, real de variável real, em $x = x_0$, é o número real, caso exista, para que tende o quociente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, quando h tende para zero, e representa-se por $f'(x_0)$ ou $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$.

$f'(x_0)$ também é designado por **derivada** da função f no ponto de abcissa x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



Interpretação geométrica: corresponde ao declive da recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa x_0.

Seja m o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0, então:

- $m = f'(x_0)$
- $m = tg(\alpha)$ sendo α a inclinação da recta tangente. $(0^\circ \le \alpha < 180^\circ)$

Derivada da função num ponto do seu domínio

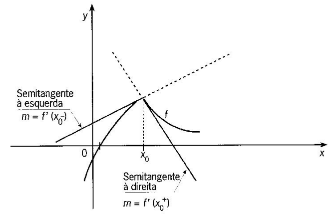
Uma função diz-se derivável num ponto do seu domínio se admite nesse ponto derivada finita. Se uma função é derivável num ponto, então existe recta tangente (não vertical) ao gráfico nesse ponto, sendo o declive dessa recta igual à derivada da função no ponto.

Nos pontos de descontinuidade e nos pontos angulosos, a função não é derivável. Nesses pontos não é possível traçar a recta tangente ao gráfico.

Derivadas laterais

Geometricamente, a derivada à esquerda de x_0 representa o declive da semitangente à esquerda e a derivada à direita de x_0 representa o declive da semitangente à direita de x_0.

Como as semitangentes à esquerda e à direita em x_0 têm declives distintos, conclui-se que não há recta tangente no ponto de abcissa x_0.



Seja f uma função real de variável real e seja $x_0 \in D_f$

A derivada à direita no ponto de abcissa x_0, representa-se por $f'(x_0^+)$ e é dada por

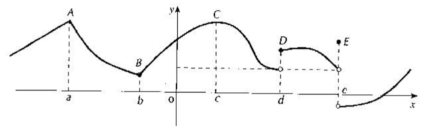
$$f'(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

A derivada à esquerda no ponto de abcissa x_0, representa-se por $f'(x_0^-)$ e é dada por

$$f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

A derivada no ponto de abcissa x_0 existe se e só se $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ e $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

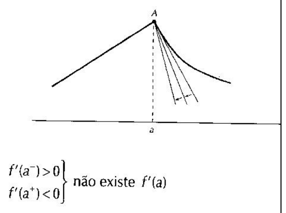
Dos pontos A, B, C, D e E, indica aqueles em que não existe derivada.



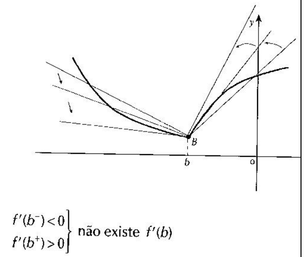
Resolução:

Vamos fazer uma análise gráfica para cada um dos pontos:

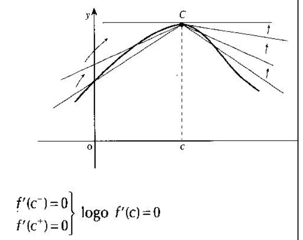
Ponto A



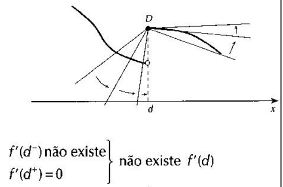
Ponto B



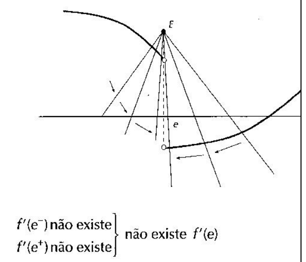
Ponto C



Ponto D



Ponto E



Nota: Por vezes a calculadora indica um valor para a derivada de uma função em pontos em que essa derivada não existe.

Por exemplo, na função $f(x)=|x-1|$, obtém-se na máquina que a derivada no ponto de abcissa 1 é 0, quando na realidade, não existe $f'(1)$.

Derivabilidade e continuidade

Teorema: Toda a função derivável num ponto é contínua nesse ponto.

Nota: O recíproco deste teorema não é válido; por exemplo, a função definida por $f(x)=|x-1|$ é contínua no ponto de abcissa 1 e não é derivável nesse ponto.

Função derivada da função *f*

É a função cujo domínio é o conjunto de todos os valores de D_f em que f é derivável (tem derivada finita) e que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

$D_{f'} \subset D_f$ $\qquad$ $f': D_{f'} \to \Re$, $x \mapsto f'(x)$

Regras de derivação

Recorda

$(k)'=0$ (k constante) $\qquad$ $(mx+b)'=m$; $m,b\in\Re$ $\qquad$ $(ax^3+bx^2+cx+d)'=3ax^2+2bx+c$; a,b,c e $d\in\Re$ e $a\neq 0$

$(x)'=1$ $\qquad$ $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$; a,b e $c\in\Re$ e $a\neq 0$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}$; $a\in\Re\setminus\{0\}$

Derivada de uma potência de expoente racional

$(x^n)'=n.x^{n-1}$; $n\in Q$

Derivada da soma e da diferença de duas funções

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a,b[$, a função $f+g$ é derivável em $]a,b[$, e:

$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a,b[$, a função $f-g$ é derivável em $]a,b[$, e:

$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

Derivada de um produto de funções

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a,b[$, a função $f\times g$ é derivável em $]a,b[$, e:

$(f\times g)'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$

Se k é uma função constante e como a derivada de uma constante é zero, tem-se: $(k\times f)'(x)=k\times f'(x); k\in\Re$

Derivada de um quociente de funções

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a,b[$, a função $\frac{f}{g}$ é derivável em $]a,b[$, e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{[g(x)]^2}\ ,\ g(x)\neq 0$$

Derivada da função composta

Dadas duas funções f e g tais que $x_0\in D_{g\circ f}$, f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então, a derivada de $g\circ f$ em x_0 é dada por:

$(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\times g'(f(x_0))$

Derivada da potência

Sendo f uma função de x derivável num intervalo I, contido no domínio, e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se:

$$\left[[f(x)]^n\right]' = n[f(x)]^{n-1} \times f'(x) \;;\; n \in \Re$$

Derivadas das funções exponencial e logarítmica

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Sendo u uma função de x derivável num intervalo I, contido no domínio, e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se $\left(e^u\right)' = u'.e^u$

$$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a \qquad \left(a \in \Re^+ \setminus \{1\}\right)$$

Sendo u uma função de x derivável num intervalo I, contido no domínio, e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se $\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a \qquad \left(a \in \Re^+ \setminus \{1\}\right)$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Sendo u uma função de x derivável num intervalo I, contido no domínio, e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad \left(a \in \Re^+ \setminus \{1\}\right)$$

Sendo u uma função de x derivável num intervalo I, contido no domínio, e aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u.\ln a} \qquad \left(a \in \Re^+ \setminus \{1\}\right)$

Exercícios:

1. Dada a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x.e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

a) Caracteriza a função derivada de f.
b) Escreve uma função da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

2. f e g são funções reais de variável real tais que $f'(x) = 3x$, $\forall x \in \Re$ e $g(x) = \log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Calcula $(f \circ g)'(4)$.

3. Calcula, caso exista, recorrendo à definição de derivada de uma função, a derivada de f no ponto de abcissa1.

$f(x) = \left|x^2 - 1\right|$

4. Determina o ponto ou os pontos do gráfico da função cuja tangente é uma recta horizontal, sendo:

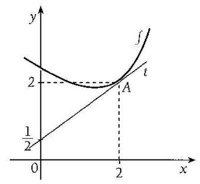
a) $f(x) = x^3 - 6x^2$

b) $f(x) = x^2.e^x$

c) $f(x) = 3 + \ln\left(4 - x^2\right)$

5. Determina uma equação da recta tangente ao gráfico de função $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ no ponto de abcissa $x = 2$.

6. A recta t é tangente ao gráfico da função f no ponto A de abcissa 2.
A derivada de f no ponto 2 é:



(A) 1 **(B)** 2

(C) $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{3}{4}$

(Exame Nacional, 1ªFase, 2ªChamada – 1996)

7. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

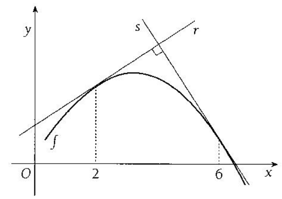
Indica o valor de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

(Exame Nacional, 2ªFase – 2001)

(A) $\dfrac{2}{3}$ **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** 4 **(D)** 0

8. Na figura estão representados:

- o gráfico de uma função f;
- a recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{4}$;
- a recta s, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 6.

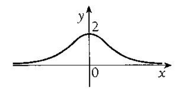


Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares, indica o valor de $f'(6)$, derivada da função f no ponto 6.

(Exames Nacionais – Épocas especiais)

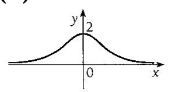
(A) $-\dfrac{3}{2}$ **(B)** $-\dfrac{4}{5}$ **(C)** $-\dfrac{2}{5}$ **(D)** $-\dfrac{5}{3}$

9. Na figura ao lado está uma representação de g', derivada de uma certa função g.

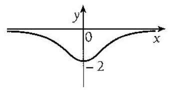


A função h é definida por $h(x) = g(x) + 1$. Nestas condições, uma representação gráfica de h', derivada de h, pode ser:

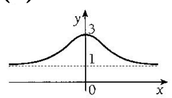
(A)



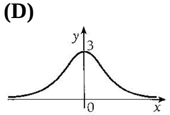
(B)



(C)

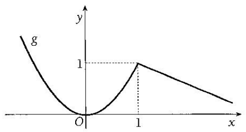


(D)



(Exame Nacional – 1993)

10. A representação gráfica de uma função g é:
Podemos concluir que



(A) $g'(1) = 0$

(B) $g'(1) = +\infty$

(C) $g'(1) = 1$

(D) $g'(1)$ não existe

(Exames Nacionais – Épocas especiais)