



Matemática 12ºano

Exercícios de preparação para exame

Complexos

1. Sendo $z = 2 + i$ então o valor de $\frac{z + i^{15} - 3}{i}$ é:

- A. $-2 + i$ B. $-1 + 2i$
C. i D. 1

2. Seja $z = \sqrt{2} + 6i$. $\text{Re } z$ e $\text{Im } z$ são respectivamente:

- A. $\sqrt{2}$ e $6i$ B. $\sqrt{2}$ e 6
C. $6i$ e $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} + 6$ e i

3. O valor de $\frac{1}{2}i^{12}$ é:

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4096}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}i$

4. Considere as seguintes afirmações, no conjunto dos números complexos:

- I. $a + bi^4$ representa sempre um número real.
II. Se $z = 1 + i$ então $\frac{z}{i} = \bar{z}$.
III. Se o afixo de um número complexo está num quadrante par então o seu conjugado está num quadrante ímpar.
IV. Se um complexo é um imaginário puro então o seu afixo está sobre o eixo dos xx .

As afirmações verdadeiras são:

- A. I e III B. I e IV
C. II e IV D. II e III

5. Seja $\bar{z}$ o conjugado de $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Então $z + \bar{z}$ é:

- A. $2a + 2bi$ B. $2a$
C. $2a + 2b$ D. a^2

6. Ao número complexo $z = 1 - i$, na forma algébrica, corresponde, na forma trigonométrica, o complexo:

- A. $\sqrt{2} \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ B. $\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$
C. $\text{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ D. $\sqrt{2} \text{ cis } \frac{3\pi}{4}$

7. Se o argumento de um complexo z for $\frac{\pi}{6}$, então o argumento de $i\bar{z}$ é:

- A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$
C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$

8. Considere o complexo $z = 2 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}$. O afixo de z pertence ao:

- A. 2.º Quadrante. B. 3.º Quadrante.
C. 4.º Quadrante. D. Eixo dos yy .

9. Seja $\bar{z}$ o conjugado de $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Então $z - \bar{z}$ é:

- A. $2bi$ B. $2a$
C. $2b$ D. 0

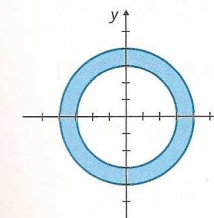
10. Se uma das raízes cúbicas de um número complexo é 3 , então as outras raízes são:

- A. $3 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$ e $3 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$ B. $3 \text{ cis } \frac{\pi}{3}$ e $3 \text{ cis } \frac{5\pi}{3}$
C. $3 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}$ e $3 \text{ cis } \frac{4\pi}{3}$ D. $3 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$ e $3 \text{ cis } \frac{7\pi}{6}$

11. Na figura está colorida uma coroa circular, formada por duas circunferências de centro na origem do referencial.

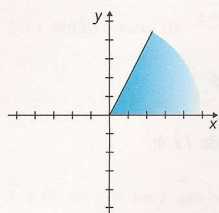
A condição que define o referido domínio plano é:

- A. $3 \leq \arg z \leq 4$
B. $|z - 3| \leq |z - 4|$
C. $\text{Re } z \leq \text{Im } z$
D. $3 \leq |z| \leq 4$

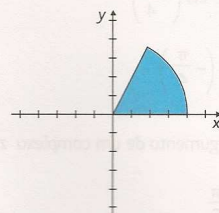


12. A condição $|z| \leq 4 \wedge 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ define um domínio plano que é representado pela figura:

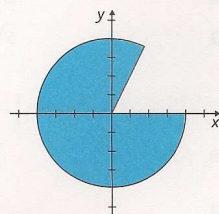
A.



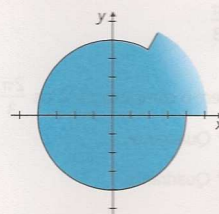
B.



C.



D.



13. Considere o número complexo $z = \sqrt{3} - 3i$. Indique:

13.1 $\operatorname{Re} z$

13.5 $z - \bar{z}$

13.2 $\operatorname{Im} z$

13.6 $z \times \bar{z}$

13.3 $|z|$

13.7 $z - \sqrt{3}$

13.4 $\bar{z}$

13.8 $|1 + 2i| - z$

14. Efectue as seguintes operações:

14.1 $(3 + 2i) + (-2 - 5i)$

14.7 $\frac{1+i}{2+i}$

14.2 $(2 - 4i) - \left(\frac{1}{3} - i\right)$

14.8 $\frac{2-2i}{1-i}$

14.3 $(3 + 2i) \times (3 - 3i)$

14.9 $(2 - 3i)^2$

14.4 $(1 - i) \times (3i)$

14.10 $|4 - 3i|^2$

14.5 $(4 - 2i) \times i^{14}$

14.11 $\frac{1}{2+i}$

15. Resolva, no conjunto dos números complexos, as seguintes equações:

15.1 $x^2 + 5 = 0$

15.5 $2x^2 = x - 6$

15.2 $3x^2 = -6$

15.6 $x^3 + 25x = 0$

15.3 $x^2 + 3x + 5 = 0$

15.7 $x^3 - 3x^2 = 2x^2 - 8x$

15.4 $2x^2 + 4x + 7 = 0$

15.8 $4x^3 + 5x^2 + 16x = 5x^2$

16. Considere os números complexos $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 3 + i$.

16.1 Determine $z_1 \times z_2$.

16.2 Determine $2z_1 + (\bar{z}_2)^2$.

16.3 Determine $(\bar{z}_1 - z_2)^{33}$.

17. Escreva os seguintes números na forma trigonométrica:

17.1 2

17.5 $1 + \sqrt{3}i$

17.2 $-\sqrt{2}$

17.6 $-2 + 2i$

17.3 $3i$

17.7 $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

17.4 $1 + i$

17.8 $-\sqrt{3} - i$

18. Escreva os seguintes números na forma algébrica:

18.1 $2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$

18.6 $4 \operatorname{cis} 0$

18.2 $3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

18.7 $2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

18.3 $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

18.8 $3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$

18.4 $\frac{1}{2} \operatorname{cis} \pi$

18.9 $5 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$

18.5 $2 \operatorname{cis} (2\pi)$

19. Efectue as seguintes operações:

$$19.1 \quad 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} + 3 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$19.6 \quad \left(3 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} \right)^2$$

$$19.2 \quad \frac{2}{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} - (3 + 2i)$$

$$19.7 \quad \frac{3 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{5}}{\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}$$

$$19.3 \quad 5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{7} \times \frac{2}{3} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$$

$$19.8 \quad \frac{\operatorname{cis} \pi}{2 \operatorname{cis} 0}$$

$$19.4 \quad \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \times 3 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{5}$$

$$19.9 \quad \sqrt[3]{8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}$$

$$19.5 \quad \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{5} \right)^3$$

20. No conjunto dos números complexos considere:

$$z_1 = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right) \quad \text{e} \quad z_2 = 1 + 2i$$

20.1 Resolva a equação $z_2 \times z = 6 + 4z_1 \times \bar{z}_1$.

20.2 Determine as raízes cúbicas de z_1 .

20.3 Resolva a equação $z_2^2 = 6 + z$.

21. Seja $z = 16 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$.

21.1 Determine as raízes quartas de z .

21.2 Escreva o conjugado de z na forma algébrica.

21.3 Calcule $z \times i^{34}$.

22. Considere, no conjunto dos números complexos, $z = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$.

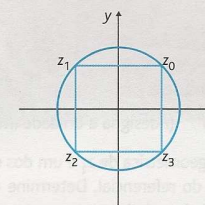
22.1 Indique o conjugado de z .

22.2 Mostre que o inverso de z é $\sqrt{3} + i$.

22.3 Determine $\left(\frac{1}{z} - \sqrt{3} \right)^{23} \times (3 + i)^2$.

23. Sabendo que $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ é uma das raízes cúbicas de um complexo z , determine as outras raízes cúbicas de z .

24. A figura seguinte representa um quadrado, de lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito numa circunferência de centro na origem e com raio 2.



Determine os números complexos z_0, z_1, z_2 e z_3 , cujos afijos são os vértices do quadrado.

Indique os números na forma algébrica e na forma trigonométrica.

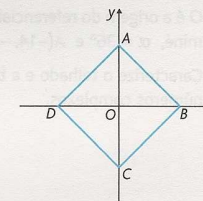
25. Represente, no plano d'Argand, o domínio plano definido pela condição:

$$\left| z - 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \right| \leq 2 \wedge |z - 2i| \leq |z + 2 - 4i| \wedge |z - 2i| \leq |z - 2 - 4i|$$

26. Considere, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$.

Os pontos A e C pertencem ao eixo imaginário, e os pontos B e D pertencem ao eixo real.

Estes quatro pontos encontram-se à distância de uma unidade da origem do referencial.



26.1 Sejam $w = 1 - i$ e $z = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$.

Sem recorrer à calculadora, mostre que as raízes quartas do complexo $\frac{w^2}{z}$ têm por imagens geométricas os pontos A, B, C e D .

26.2 Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$.

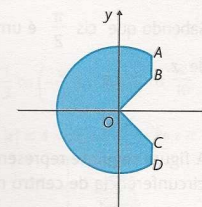
27. Defina por uma condição, no conjunto dos números complexos, a zona colorida da figura ao lado, sabendo que:

A circunferência tem centro em O e diâmetro 4 unidades.

$[OB]$ e $[OC]$ pertencem às bissetrizes, respectivamente, dos quadrantes ímpares e pares.

$[AB]$ e $[CD]$ pertencem à mesma recta vertical que contém o afixo

$$\text{de } z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}.$$



28. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja:

$$z_1 = 4i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

28.1 No plano complexo, a imagem geométrica de z , é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

28.2 Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot z = 2 + z_1$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

29. Em baixo está uma fotografia de um suporte de bibelôs em forma de casa. Considere a madeira utilizada na sua construção como tendo espessura «nula». Utilize os seguintes dados:

O é a origem do referencial; o objecto é simétrico em relação ao eixo imaginário, com excepção da chaminé, $\alpha = 36^\circ$ e $A(-14, -24)$.

Caracterize o telhado e a base da casa representada no suporte, utilizando condições no conjunto dos números complexos.

