



Matemática 12ºano

Exercícios de preparação para exame

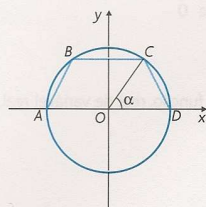
Trigonometria

1. Se $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ então $\sin^2(2\alpha)$ é igual a:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$
C. 1 D. 4

2. Na figura está representado um círculo trigonométrico e um trapézio isósceles $[ABCD]$, cujos vértices pertencem à circunferência. A base maior é um diâmetro da circunferência e α é a amplitude do ângulo COD . A área do trapézio é dada, em função de α , por:

- A. $A(\alpha) = 1 + \sin \alpha \cos \alpha$
B. $A(\alpha) = \sin^2 \alpha \cos \alpha$
C. $A(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
D. $A(\alpha) = \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$



3. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = \cos x$. Uma equação de uma recta tangente ao gráfico de f pode ser definida por:

- A. $y = -3$ B. $y = 0$
C. $y = x + \frac{\pi}{2}$ D. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

4. Considere as seguintes condições:

- I. $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$
II. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
III. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
IV. $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha$

As afirmações verdadeiras $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, são:

- A. I e III B. I e IV
C. II e IV D. II e III

5. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = 2 + 3 \sin(\pi x + 1)$. A amplitude e o período de f são, respectivamente:

- A. 2 e 1 B. 3 e 2
C. 2 e 3 D. 3 e 1

6. Os limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x \ln e^3}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x}$ têm como valores, respectivamente:

- A. 1 e $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{3}$ e 0 D. 1 e 0

7. Seja f a função, real de variável real, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{tg}(6x)}{3x}$. O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2}$ é:

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 3

8. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = e^{\operatorname{tg}(2x)}$. O valor de $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é:

- A. $\frac{1}{e}$ B. 1
C. 2 D. e

9. Dada a função, real de variável real, definida por $f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \alpha$, a função derivada é definida por:

- A. $f'(\alpha) = 2 \sin \alpha$ B. $f'(\alpha) = 2 \cos \alpha$
C. $f'(\alpha) = 2 \sin \alpha + 1$ D. $f'(\alpha) = \sin(2\alpha) + 1$

10. A recta tangente ao gráfico da função, real de variável real, definida por $f(x) = \sin^2 x + 1$, no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{4}$, é:

A. $y = -2x + \frac{\pi}{4}$

B. $y = x + \frac{3}{2}$

C. $y = x + \frac{6 - \pi}{4}$

D. $y = 2x + \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

11. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = \sin x + x$. Qual dos seguintes pontos pertence à recta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa 0?

A. (0, 2)

B. $(\frac{1}{2}, 2)$

C. $(\ln 3, 2 \ln 3)$

D. $(0, 2e^2)$

12. O valor de $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - \cos \pi}{x - \pi}$.

A. -1

B. 0

C. 1

D. π

13. Sejam α e β dois ângulos agudos. Sabendo que $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{4}$, determine, com aproximação às centésimas, o valor de $\sin(\alpha + \beta)$.

14. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Mostre que a função tem pelo menos um zero no intervalo $]0, \pi[$.

15. Indique o domínio das seguintes funções, reais de variável real:

15.1 $f(x) = \frac{3x}{2 \sin x \cos x}$

15.2 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

16. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = \cos^2 x + \cos x - 2$.

16.1 Indique o domínio de f .

16.2 Determine os zeros da função no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

16.3 Sabendo que o mínimo absoluto da função é -2, 25, determine o minimizante da função no intervalo $[0, \pi]$.

17. Faça o estudo, quanto ao domínio, contradomínio, zeros, periodicidade e sinal, da função, real de variável real, definida por $f(x) = 3 + 2 \cos(2x)$.

18. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x \cos^2 x}{2 \cos^2 x - 1}$.

18.1 Mostre que $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$.

18.2 Determine o domínio e os zeros de f .

18.3 Indique os valores de x , pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, que satisfazem a condição $f(x) = 1$.

19. Calcule os limites das seguintes funções:

19.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

19.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x}$

19.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos x}$

19.5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$

19.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x + x \cos x}$

19.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{2x}$

20. Considere as funções, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 1 + \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

20.1 Indique o domínio de cada uma das funções dadas.

20.2 Calcule:

20.2.1 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$

20.2.2 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)$

20.2.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

21. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$, sendo f a função, real de variável real, definida por

$f(x) = \sin x$. Indique o significado geométrico do referido limite.

22. Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

22.1 $f(x) = \sin(2x)$

22.2 $g(x) = 3 \cos(x + 1)$

22.3 $h(x) = 2 \sin x + \cos(2x)$

22.4 $i(x) = \sin x \times \operatorname{tg} x$

23. Seja f a função, real de variável real, definida por $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

23.1 Indique o domínio de f .

23.2 Caracterize f' .

24. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = 2 \cos^2 x - 1$.

24.1 Mostre que $f(x) = \cos(2x)$.

24.2 Determine uma equação da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{6}$.

25. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = 4 \sin x - \cos(2x)$.

25.1 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \cos(2x)}{x}$.

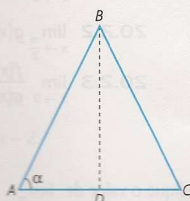
25.2 Estude a monotonia e indique os extremos da função no intervalo $]-\pi, \pi[$.

26. A figura representa um triângulo isósceles $[ABC]$, de base $[AC]$, em que $BD \perp AC$, $\alpha = \hat{B}AC$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e $\overline{AB} = 2$ cm.

26.1 Determine a expressão que define o perímetro do triângulo, em função de α .

26.2 Mostre que a área do triângulo é dada, em função de α , por $A(\alpha) = 2 \sin(2\alpha)$.

26.3 Indique o valor máximo da área do triângulo $[ABC]$.



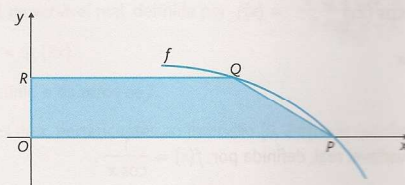
27. Considere a função f , de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

27.1 Estude a função quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

27.2 Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

27.3 Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , uma parte do gráfico da função f .



Na mesma figura está também representado o trapézio $[OPQR]$.

O ponto O é a origem do referencial e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy , respectivamente.

Os pontos P e R pertencem ao gráfico de f .

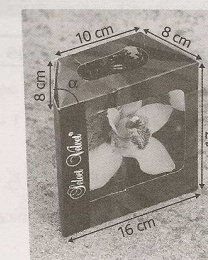
Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.

28. Para colocar uma orquídea foi construída uma caixa em cartão, com a forma de um prisma, sendo a base um trapézio isósceles. A caixa tem as medidas indicadas na fotografia anexa.

28.1 Determine a amplitude do ângulo α utilizado na construção da referida caixa.

28.2 Será que o ângulo α utilizado, mantendo as medidas da base menor e dos lados do trapézio, base do prisma, e a altura do prisma, é o ângulo que nos dá maior volume?

Se não for, qual seria a amplitude do ângulo a utilizar, com aproximação ao grau? Qual será a nova medida, com 1 c.d., da base maior do trapézio?

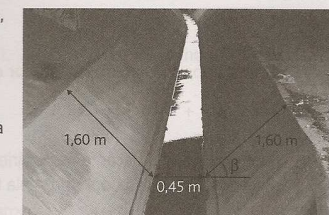


29. A fotografia mostra um canal de escoamento de águas pluviais situado em Corroios, concelho do Seixal.

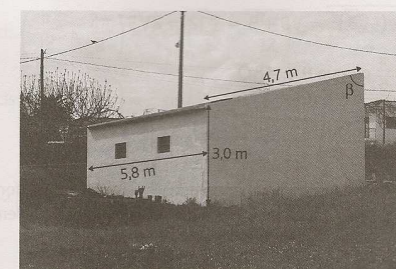
29.1 Mostre que a área da secção do canal pode ser dada, em função de β , por:

$$A(\beta) = 0,72 \sin \beta + 1,28 \sin(2\beta), \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

29.2 Determine a amplitude β para que o caudal de água no canal seja máximo.



30. Na fotografia encontra-se um armazém com a forma de um prisma, em que a parede lateral é um trapézio rectângulo. As medidas estão indicadas na fotografia.



30.1 Mostre que o volume do armazém é dado, em função de β , pela expressão:

$$V(\beta) = \frac{6 + 4,7 \cos \beta}{2} \times 27,26 \sin \beta, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

30.2 Determine o volume máximo do armazém e o valor de β para que aquele valor se verifique.