



Matemática 12ºano

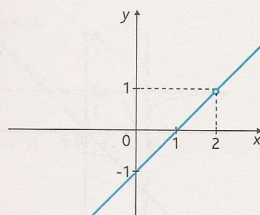
Exercícios de preparação para exame

Limites e Continuidade

1. A figura é a representação gráfica da função definida por $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

Por observação do gráfico, podemos concluir que:

- A. Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 B. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
 C. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
 D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.



2. Sendo $L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+3}$; $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{2+x}$ e $L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x - 6}{3 - 3x^2}$, podemos concluir que:

- A. $L_1 = 0$; $L_2 = \frac{3}{2}$ e $L_3 = \frac{2}{3}$ B. $L_1 = 2$; $L_2 = 3$ e $L_3 = \frac{2}{3}$
 C. $L_1 = 0$; $L_2 = 3$ e $L_3 = -\frac{2}{3}$ D. $L_1 = 2$; $L_2 = \frac{3}{2}$ e $L_3 = -\frac{2}{3}$

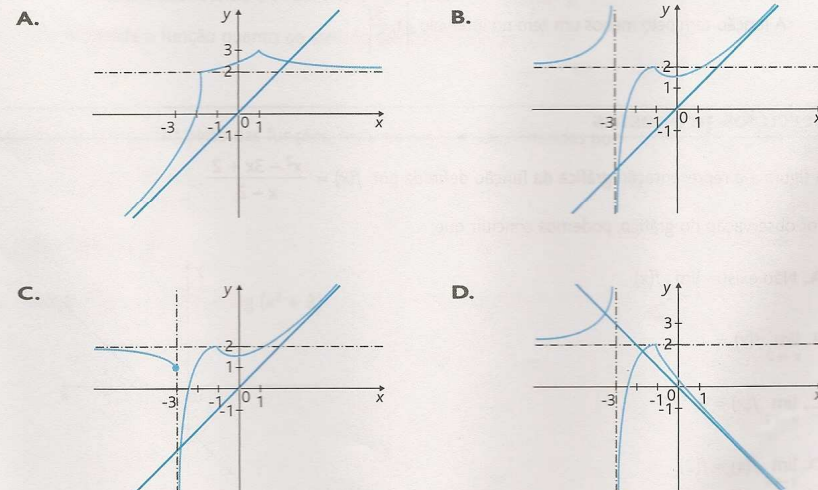
3. Considere as seguintes afirmações:

- I. Todas as funções, de domínio $\mathbb{R}$, têm limite finito em qualquer ponto do seu domínio.
 II. Considere a função f em que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Então, a função é contínua em $x = a$.
 III. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ com contradomínio $[-2, 7]$, então a função tem pelo menos um zero.
 IV. Uma função de domínio $\mathbb{R}$ não tem assíntotas verticais.

As afirmações verdadeiras são:

- A. I e II B. I e IV
 C. II e III D. III e IV.

4. Seja f uma função, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, em que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x$. Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função f ?



5. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2}$. O valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ é:

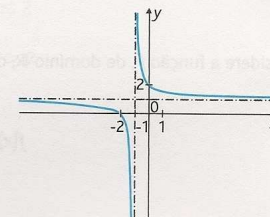
- A. 0
 B. 1
 C. $\frac{1}{2} \ln 3$
 D. $+\infty$

6. A figura representa o gráfico de uma função f , real de variável real.

Considere a sucessão de termo geral $u_n = -1 + \frac{1}{n}$.

Se $v_n = f(u_n)$, então:

- A. $\lim v_n = -\infty$
 B. $\lim v_n = +\infty$
 C. $\lim v_n = -1$
 D. Não existe $\lim v_n$.



7. De uma função h , de domínio $\mathbb{R}^-$, sabe-se que a recta de equação $y = 2$ é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{e^x}$?

- A. $+\infty$
B. $-\infty$
C. 0
D. 2

8. Considere a função f , real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$ e estritamente crescente. Desta função sabe-se ainda que $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Com estes dados podemos concluir que:

- A. A função tem A.V.: $x = 1$; A.H.: $y = 0$ e $D'_f = [-2, 1]$.
B. A função tem A.V.: $x = 1$; A.H.: $y = 0$; A.O.: $y = x$ e $D'_f =]-\infty, 1]$.
C. A função tem A.H.: $y = 0$; A.O.: $y = x$ e $D'_f =]-\infty, 0]$.
D. A função tem A.H.: $y = 0$; A.O.: $y = x$ e $D'_f =]-\infty, 1]$.

9. Para um certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função g , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} k + \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual é o valor de k ?

- A. -1
B. 0
C. 1
D. 2

10. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1}}{x-3} & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{\ln(3x+a)-1}{x+2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

O valor real de a , de modo a que a função seja contínua em $\mathbb{R}$ é:

- A. -2
B. e
C. 4
D. $e^2 + 3$

11. De uma função polinomial do segundo grau sabe-se que $f(-3) < 0$, $f(-1) > 0$ e $f(1) = 0$. Podemos concluir que os zeros desta função estão no intervalo:

- A. $]-3, -1[$
B. $]-3, 1[$
C. $]-3, 1]$
D. $]-2, 1]$

12. Considere a função f , real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f(x) \geq x$ se $x \in [5, 7]$ e $f(x) < \cos x$ se $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, podemos concluir que a função tem pelo menos um zero no intervalo:

- A. $]1, 5[$
B. $]4, 6[$
C. $]0, \pi[$
D. $]-1, 0[$

13. Determine os seguintes limites:

13.1 $\lim_{x \rightarrow 3} (\pi - 2)$

13.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$

13.2 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 9)$

13.4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3-x)}{e^{1+x}}$

13.5 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{8}{x^2 + x}}$

13.8 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{e^{x+2}}$

13.6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 5}$

13.9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3-x} + 1}{x - 3}$

13.7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x - 5)$

13.10 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\log_2(3-x) - 2x]$

14. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Calcule, se existirem:

14.1 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

14.2 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

15. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{x+1} + 4 & \text{se } -1 < x < 3 \\ \frac{3(x+2)^2}{x^2} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Calcule, se existirem:

15.1 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

15.3 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

15.2 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

15.4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

16. Determine, se existirem, os seguintes limites:

$$16.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$$

$$16.5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9x}{x^3 - 3x^2}$$

$$16.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$16.6 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$16.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - e^2}{4x^2 - 2}$$

$$16.7 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{x^2 - 5x + 6}$$

$$16.4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 7}{2 - 3x}$$

$$16.8 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{11 + x} - 3}{x + 2}$$

17. O António retirou uma garrafa de água do frigorífico e encheu um copo com água. Levou-o para a sala, que mantinha uma temperatura constante, e como a água estava muito fria esperou que esta ficasse a uma temperatura mais agradável. A temperatura da água (T – em graus centígrados), depois de ter sido levada para a sala, é dada em função do tempo (t – em minutos) pela expressão $T(t) = 20 - 19e^{-\frac{t}{25}}$.

17.1 A que temperatura se encontrava a água quando foi colocada na sala.

17.2 Se a temperatura a que o António pretendia beber a água fosse aproximadamente de 8°C , quanto tempo, em minutos, teria de esperar?

17.3 Se o copo fosse deixado na sala, mantendo-se constante a temperatura desta, qual seria a temperatura da água ao fim de muitas horas?

18. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$18.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$18.8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{4x}$$

$$18.2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$$

$$18.9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)^3}{x}$$

$$18.3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$18.10 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$18.4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$$

$$18.11 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{4x - 4}$$

$$18.5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$18.12 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$18.6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1}}{x + 1}$$

$$18.13 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x}$$

$$18.7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x}$$

$$18.14 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^4}{x}$$

19. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{2x} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(x + 1)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 5x - 2}{x + 1} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

19.1 Calcule os limites laterais no ponto de abscissa $x = 0$.

19.2 Determine:

$$19.2.1 \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$$

$$19.2.2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

$$19.2.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

20. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{3 + 2x^2}$$

20.1 Determine as equações das assíntotas do gráfico de f .

20.2 Mostre que o ponto $P(3, 2)$ pertence a uma das assíntotas do gráfico de f .

21. Escreva as equações das assíntotas do gráfico de cada uma das seguintes funções:

$$21.1 f(x) = \frac{3}{x + 1}$$

$$21.4 i(x) = \frac{|x - 2|}{x}$$

$$21.2 g(x) = \frac{x^2 - 3x}{2 - x^2}$$

$$21.5 j(x) = e^{x+2}$$

$$21.3 h(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$$

$$21.6 k(x) = \frac{\log_3 x}{3}$$

22. Considere as funções, reais de variável real, e, para cada uma delas, estude a continuidade nos pontos de abscissa indicados:

$$22.1 \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 11 & \text{se } x < 3 \\ 2x^2 + 6x + 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{para } x = 3.$$

$$22.2 \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x < 2 \\ 7 & \text{se } x = 2 \\ 2\ln e^2 + 3 & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{para } x = 2.$$

$$22.3 \quad h(x) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{se } x < -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \\ 2 + \sqrt{2-x} & \text{se } -2 < x < 1 \\ \frac{3(5x-4)^2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{para } x = -2 \text{ e } x = 1.$$

23. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ b & \text{se } x = 1 \\ x^2 - 6x + a & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

23.1 Determine a de modo a que a função tenha limite em $x = 1$.

23.2 Indique o valor de b para que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

24. Mostre que a equação $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{4} - \frac{3}{8} = 0$ tem as suas três soluções nos intervalos $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ e $]0, 1[$.

25. Seja f a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + x + 2$$

Prove que a equação $f(x) = 3$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-1, 2[$.

26. Considere a função polinomial definida por:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3$$

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano, que a função tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 3[$.

27. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1 + \sqrt{3-x}} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\log(x+10) + x - 1}{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

27.1 Determine o domínio da função.

27.2 Estude a continuidade de f .

27.3 Mostre que a função tem pelo menos um zero no intervalo $]-1, 1[$.